ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

«Η ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ»

Άσκηση 1.

Ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα 0.85c. Να βρεθούν (a) η κλασσική και σχετικιστική ορμή (b) η ολική και η κινητική ενέργεια (m_o=9.11x10^{-31} kg)

Απάντηση

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.85^2}} = \frac{1}{0.527} = 1.90$$

Ενέργεια μάζα ηρεμίας ηλεκτρονίου:

$$m_o c^2 = 9.11\cdot 10^{-31} kg \cdot (3\cdot 10^8 m/s)^2 = 8.20\cdot 10^{-14} Joule = 511 \; keV$$

$$(1eV = 1.602\cdot 10^{-19} Joule)$$

(a)
$$p = mu = \gamma m_o u \Rightarrow p = 1.90\cdot 9.11\cdot 10^{-31}\cdot 0.85\cdot 3\cdot 10^8 \Rightarrow$$
$$p = 4.4\cdot 10^{-22} kg\cdot m/s$$

Κλασσική ορμή: $m_o u = 52.7\% p$

(b) $E = \gamma \cdot m_o c^2 = 1.90\cdot 511 = 970 \; keV$

$$K = E - m_o c^2 = 970 - 511 = 459 \; keV$$

Άσκηση 2.

Ηλεκτρόνιο επιταχύνεται σε ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ηλεκτρόδιο θετικού δυναμικού 1000 kV. Να βρεθεί η τελική ταχύτητα του ηλεκτρονίου κλασσικά και σχετικιστικά (m_oc^2=511 keV)

Απάντηση

Κινητική ενέργεια: 1000 keV

Κλασσικά:

$$1000\ \ keV = \frac{1}{2}m_o u^2 = \frac{1}{2}m_o c^2\left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}511\ \ keV \cdot \left(\frac{u}{c}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u}{c}\right)^2 = 3.914 \Rightarrow u = 1.99c$$

δηλ. **u > c !**

Σχετικιστικά:

$$K = 1000\, keV \Rightarrow E = K + m_o c^2 = 1000 + 511 = 1511\, keV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{E}{m_o c^2} = \frac{1511}{511} = 2.957 \Rightarrow \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 2.957 \Rightarrow u = 0.94 \cdot c$$

- Τα κλασσικά και σχετικιστικά αποτελέσματα μπορούν να θεωρηθούν περίπου ίσα (με διαφορές μικρότερες του 1%), όταν η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι μικρότερη των 10 keV:

  Κλασσικά:

  $$K = 10\ \ keV \Rightarrow \gamma = \frac{521}{511} \Rightarrow \gamma = 1.02 \Rightarrow u = 0.195c$$

  Σχετικιστικά:

  $$10\ \ keV = \frac{1}{2}m_o u^2 = \frac{1}{2}m_o c^2\left(\frac{u}{c}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{u}{c}\right)^2 = 0.03914 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow u = 0.198c$$

Άσκηση 3 Serway 8

Ένα ρολόι μέσα σε κινούμενο διαστημόπλοιο πηγαίνει ένα λεπτό πίσω την ημέρα σε σχέση με ένα ίδιο ρολόι στη Γη. Ποια είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου;

Απάντηση

Από τον τύπο της διαστολής του χρόνου

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$$

$$24 \cdot 60 = \gamma(24 \cdot 60 - 1) \Rightarrow \gamma = 1440/1439 \Rightarrow \gamma = 1.000695 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0.990306 \Rightarrow \upsilon^2 = 0.0013884 \cdot c^2 \Rightarrow \upsilon = 0.0373 \cdot c$$

Άσκηση 4 Serway 9

Ένα ατομικό ρολόι βρίσκεται μέσα σε αεριωθούμενο αεροπλάνο. Το ρολόι μετράει ένα χρονικό διάστημα 3600 s όταν το αεροπλάνο κινείται με ταχύτητα 1080 km/h. Ποιο είναι το χρονικό διάστημα που θα μετρήσει ίδιο ρολόι που κρατάει παρατηρητής στο έδαφος.

Απάντηση

Από τον τύπο της διαστολής του χρόνου

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}} \Delta t' = \frac{3600}{\sqrt{\left(1 - \frac{\left(1.08 \cdot 10^6 / 3600\right)^2}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2}\right)}} = \frac{3600}{\sqrt{\left(1 - 10^{-12}\right)}}$$

Προσέγγιση: $\frac{\upsilon}{c} << 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}} \cong 1 + \frac{\upsilon^2}{2c^2}$

$$\Delta t = (1 + 0.5 \cdot 10^{-12}) \cdot 3600 = 3600 + 1.8 \cdot 10^{-9}\, s$$

Άσκηση 5 Serway 11

Διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα 0.9c. Αν το μήκος του είναι L_0 όταν μετρηθεί μέσα από το διαστημόπλοιο, ποιο είναι το μήκος του όταν μετρηθεί από παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος.

Απάντηση

Από τον τύπο της συστολής του μήκους:

$$L = L'/\gamma \Rightarrow L = L_0 \cdot \sqrt{\left(1-0.9^2\right)} \Rightarrow L = 0.436 \cdot L_0$$

Άσκηση 6 Serway 13

Ένα μιόνιο που σχηματίζεται ψηλά στη γήινη ατμόσφαιρα κινείται με ταχύτητα 0.99c για μια απόσταση 4.6 km προτού διασπαστεί:

$$\mu^- \to e^- + \nu + \bar{\nu}$$

a. Πόσο χρόνο ζει το μιόνιο στο δικό του σύστημα αναφοράς.
b. Πόσο διάστημα ταξιδεύει όπως μετριέται στο δικό του σύστημα αναφοράς.

Απάντηση

$$\gamma = \left(\sqrt{1-0.99^2}\right)^{-1} = 7.089$$

a.

$$s = \upsilon \cdot \Delta t \Rightarrow 4600m = 0.99 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = 1.55 \cdot 10^{-5} s \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta t = 15.5 \mu s$$
$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = 15.5/7.089 \Rightarrow \Delta t' = 2.186 \mu s$$

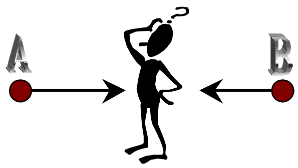
b.

$$s' = 0.99 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s \cdot 2.186 \cdot 10^{-6} s = 649m \text{ ή}$$
$$L = L'/\gamma \Rightarrow L = 4600/7.089 \Rightarrow L = 649m$$

Άσκηση 7 Serway 16

Ένας παρατηρητής βλέπει δύο σωματίδια να κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, το καθένα με ταχύτητα 0.9c. Ποια είναι η ταχύτητα του ενός σωματιδίου ως προς το άλλο;

Απάντηση



$\mathbb{S}$: $u_A = -u_B = 0.9c$

$\mathbb{S}'(\mathbb{O}'\equiv\mathbb{A})$: $\upsilon = 0.9c$ $\qquad u'_A = \dfrac{u_A - \upsilon}{1 - \dfrac{u_A \cdot \upsilon}{c^2}} = 0$

$$u'_B = \frac{u_B - \upsilon}{1 - \dfrac{u_B \cdot \upsilon}{c^2}} = \frac{-0.9 \cdot c - 0.9 \cdot c}{1 + \dfrac{0.9^2 \cdot c^2}{c^2}} = -0.9945 \cdot c$$

Άσκηση 8 Serway 17

Δύο διαστημόπλοια πλησιάζουν το ένα το άλλο και το καθένα κινείται με την ίδια ταχύτητα, όπως μετριέται από παρατηρητή στη Γη. Αν η σχετική τους ταχύτητα είναι 0.7c, ποια είναι η ταχύτητα του καθενός διαστημοπλοίου;

Απάντηση

$\mathbb{S}$: $u_A = -u_B$

$\mathbb{S}'(\mathbb{O}'\equiv\mathbb{A})$: $\upsilon = u_A = -u_B$

$$u'_B = -0.7c \Rightarrow \frac{u_B - \upsilon}{1 - \dfrac{u_B \cdot \upsilon}{c^2}} = \frac{2u_B}{1 + \dfrac{u_B^2}{c^2}} = -0.7 \cdot c \Rightarrow 2u_B = -0.7c - 0.7u_B^2 / c \Rightarrow$$

$$0.7u_B^2 + 2c \cdot u_B + 0.7 \cdot c^2 = 0 \Rightarrow u_B = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 0.7^2 \cdot c^2}}{0.7} \Rightarrow u_B = \begin{cases} -0.41c \\ -2.45c \end{cases}$$

Η λύση 2.45c απορρίπτεται (>c).

Άσκηση 9 Serway 27

Βρείτε την ταχύτητα σωματιδίου του οποίου η ολική ενέργεια είναι διπλάσια από την ενέργεια ηρεμίας του.

Απάντηση

$$E^2 = p^2 \cdot c^2 + (m_o \cdot c^2)^2 \Rightarrow p^2 \cdot c^2 = 3 \cdot (m_o \cdot c^2)^2 \Rightarrow p^2 = 3 \cdot m_o^2 \cdot c^2$$

$$\Rightarrow \frac{m_o^2 \cdot \upsilon^2}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} = 3 \cdot m_o^2 . c^2 \Rightarrow 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{1}{3} \frac{\upsilon^2}{c^2} \Rightarrow \upsilon = 0.866 \cdot c$$

Άσκηση 10 Serway 28

Ένα πρωτόνιο αποκτά κινητική ενέργεια 50 GeV σε επιταχυντή. Προσδιορίστε (a) την ορμή και (b) την ταχύτητά του ($m_p c^2$=1GeV).

Απάντηση

$$K = E - m_{op} \cdot c^2 \Rightarrow E = 51 \ \ GeV$$

(a) $E^2 = p^2 c^2 + \left(m_{op} c^2\right)^2 \Rightarrow p^2 c^2 = 51^2 - 1^2 \Rightarrow p = 50.99 \ \ GeV / c$

(b) $E = 51 \ \ GeV \Rightarrow \gamma \cdot m_{op} c^2 = 51 \Rightarrow \gamma = 51 \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{1}{51} \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon = 0.9998c$

Άσκηση 11 Serway 30

Στον σωλήνα μιας συνηθισμένης έγχρωμης τηλεόρασης, τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται μέσω μιας διαφοράς δυναμικού 25 kV. (a) Τι ταχύτητα έχουν τα ηλεκτρόνια όταν προσκρούουν στην οθόνη (b) Ποιά η κινητική τους ενέργεια σε Joule (m_e=511keV).

Απάντηση

(a)
$$K = E - m_o \cdot c^2 \Rightarrow 25 \ \ keV = E - 511 \ \ keV \Rightarrow E = 536 \ \ keV \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \gamma \cdot m_o c^2 = 536 \ \ keV \Rightarrow \gamma = 1.049 \Rightarrow \upsilon = 0.30c$$

(b) $K = 25 \ \ keV = 25 \cdot 10^3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \ \ Joule = 4 \cdot 10^{-15} \ \ Joule$

Άσκηση 12 Serway 31

Ηλεκτρόνια επιταχύνονται έως μια ενέργεια $2x10^{10}$ eV στον γραμμικό επιταχυντή του Stanford, που έχει μήκος 3 km. (a) Ποιος είναι ο παράγοντας γ για τα ηλεκτρόνια; (b) Ποια είναι η ταχύτητα των ηλεκτρονίων με ενέργεια 20 GeV; (c) Πόσο μήκος φαίνεται να έχει ο επιταχυντής σε ένα ηλεκτρόνιο 20 GeV; (m_e=511keV)

Απάντηση

(a)
$$K = E - m_o \cdot c^2 \Rightarrow 20 \ \ GeV = E - 511 \ \ keV \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E = 20{,}000{,}511 \ \ keV \Rightarrow \gamma \cdot m_o c^2 = 20{,}000{,}511 \ \ keV \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \gamma = 3.914 \cdot 10^4$$

(b) $\gamma = 3.914 \cdot 10^4 \Rightarrow \left(\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \right)^{-1} = 3.914 \cdot 10^4 \Rightarrow \upsilon = 0.9999999997c$

(c) $L = 3000 / \gamma = 0.0766 \ \ m$

Άσκηση 13 Serway 33

Ένα πιόνιο που βρίσκεται σε ηρεμία ($m_{0\pi}$=270m_{0e}) διασπάται σε ένα μιόνιο ($m_{0\mu}$=207m_{0e}) και ένα αντινετρίνο ($m_{0\nu}$=0) σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα: $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}$. Βρείτε την κινητική ενέργεια του μιονίου και του αντινετρίνο σε MeV.

Απάντηση

Αρχή διατήρησης ενέργειας:

$$E_\pi = E_\mu + E_\nu \Rightarrow 270 \cdot m_{0e}c^2 = m_\mu c^2 + p_\nu c \qquad [1]$$

$$\left[E^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \Rightarrow p_\nu = \frac{E_\nu}{c} \right]$$

Αρχή διατήρησης ορμής:

$$\vec{p}_\pi = 0 \Rightarrow \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu = 0 \qquad [2]$$

Από τις σχέσεις [1] και [2]:

$$270 \cdot m_{0e} \cdot c^2 = m_\mu \cdot c^2 + p_\mu \cdot c = \gamma \cdot m_{0\mu} \cdot c^2 + \gamma \cdot m_{0\mu} \cdot \upsilon_\mu \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 270 \cdot m_{0e} \cdot c = 207 \cdot m_{0e} \cdot \gamma \cdot \left(c + \upsilon_\mu\right) \Rightarrow \frac{270}{207}c = \frac{c + \upsilon_\mu}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_\mu^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.3 = \frac{c + \upsilon_\mu}{\sqrt{c^2 - \upsilon_\mu^2}} \Rightarrow 1.3 = \sqrt{\frac{c + \upsilon_\mu}{c - \upsilon_\mu}} \Rightarrow \upsilon_\mu = 0.26c \Rightarrow \gamma = 1.0355$$

$$K_\mu = \gamma \cdot m_{0\mu} \cdot c^2 - m_{0\mu} \cdot c^2 = 0.0355 \cdot 207 \cdot m_{0e} \cdot c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K_\mu = 0.0355 \cdot 207 \cdot 0.511 MeV = 3.76 MeV$$

Από την σχέση [1]:

$$E_\nu = 270 \cdot m_{0e}c^2 - m_\mu c^2 = (270 - 207) \cdot m_{0e} \cdot c^2 - 3.76 MeV \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_\nu = 28.4 MeV$$

Άσκηση 14 Serway 34

Ένα ισότοπο του Ra μεταστοιχειώνεται εκπέμποντας ένα σωμάτιο α σε ένα ισότοπο του Rn σύμφωνα με την πυρηνική αντίδραση:

$$^{226}_{88}Ra \rightarrow ^{222}_{86}Rn + ^{4}_{2}He$$

Οι μάζες των ατόμων είναι 226.0254 (Ra), 222.0175 (Rn), και 4.0026 (He). Πόση ενέργεια εκλύεται ως αποτέλεσμα αυτής της αντίδρασης.

Απάντηση

$$\Delta m = 226.0254 - (222.0175 + 4.0026) \Rightarrow \Delta m = 0.0053u$$

$$1\ u = 931.5016\ MeV$$

$$\Delta m = 4.94 MeV$$

Άσκηση 15 Serway 36

Υπολογίστε την ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο του ισοτόπου ^{12}C. Δίνονται m_p=1.007276 u m_n=1.008665 u.

Απάντηση

$$\Delta m = 12 - 6 \cdot m_p - 6 \cdot m_n = -0.09565u$$

$$E_n = 0.09565u \cdot 931.5016 \frac{MeV}{u} \Big/ 12 = 7.425 MeV$$

Άσκηση 16 Serway 37

Η ακτινοβολούμενη ισχύς του ήλιου είναι $3.8 \cdot 10^{26}$ W. Πόση ύλη μετατρέπεται σε ενέργεια στον Ήλιο ανά δευτερόλεπτο.

Απάντηση

$$E = m \cdot c^2 \Rightarrow 3.8 \cdot 10^{26} J = m \cdot 9 \cdot 10^{16}\ m/s \Rightarrow m = 4.2 \cdot 10^9\ kg$$

Άσκηση 17 Serway 38

Μια ακτίνα γ μπορεί να δημιουργήσει ένα ηλεκτρόνιο και ένα αντι-ηλεκτρόνιο (ποζιτρόνιο) όταν εισέλθει στο ηλεκτρικό πεδίο ενός βαρέως πυρήνα ($\gamma \to e^+ + e^-$). Ποια είναι η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να έχει ένα φωτόνιο για να συμβεί το παραπάνω;

Απάντηση

$$E_\gamma = 2 \cdot m_{oe} \cdot c^2 \Rightarrow E_\gamma = 2 \cdot 511 \ \ keV \Rightarrow E_\gamma = 1.022 \ \ MeV$$

Άσκηση 18 Serway 41

Η επικρατέστερη πυρηνική αντίδραση στον ήλιο είναι $4p \to He^4 + \Delta E$. Αν η μάζα ηρεμίας κάθε πρωτονίου είναι 938.2 MeV και η μάζα ηρεμίας του He^4 3727 MeV, υπολογίστε το ποσοστό της αρχικής μάζας που μετατρέπεται σε ενέργεια.

Απάντηση

$$\Delta E = 4 \cdot 938.2 - 3727 \Rightarrow \Delta E = 25.8 \ \ MeV \Rightarrow \Delta E / E = 25.8/(4 \cdot 938.2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta E / E = 0.69\%$$

Άσκηση 19 Serway 42

Η ετήσια κατανάλωση των ΗΠΑ είναι της τάξης των 10^{20} Joule. Πόση ύλη πρέπει να μετατραπεί τελείως σε ενέργεια για να καλύψει αυτή την κατανάλωση;

Απάντηση

$$E = m \cdot c^2 \Rightarrow 10^{20} \, Joule = m \cdot (3 \cdot 10^8 \ m/s)^2 \Rightarrow m = 1.1 \cdot 10^3 \, kg$$

Άσκηση 20 Serway 43

Ένα ηλεκτρόνιο έχει ταχύτητα 0.75c. Βρείτε την ταχύτητα ενός πρωτονίου που έχει (a) την ίδια κινητική ενέργεια με το ηλεκτρόνιο και (b) την ίδια ορμή με το ηλεκτρόνιο.

Απάντηση

$$\gamma_e = \left(\sqrt{1-0.75^2}\right)^{-1} = 1.512$$

a. $K_e = \gamma \cdot m_{oe} \cdot c^2 - m_{oe} \cdot c^2 = (1.512-1)\cdot 0.511 MeV = 0.262 MeV$

$$K_p = K_e \Rightarrow (\gamma_p - 1)\cdot m_{op} \cdot c^2 = 0.262 MeV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_p = \frac{0.262}{938.2} + 1 \Rightarrow \gamma_p = 1.000279 \Rightarrow \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0.999721 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = 0.0236 \cdot c$$

ή

$$K_p = K_e \Rightarrow (\gamma_p - 1)\cdot m_{op} \cdot c^2 = (\gamma_e - 1)\cdot m_{oe} \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\gamma_p - 1)\cdot 2000 = 0.512 \Rightarrow \gamma_p = 1 + \frac{0.512}{2000} \Rightarrow \gamma_p = 1.000256 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0.999744 \Rightarrow \upsilon = 0.0226 \cdot c$$

b.

$$p_p = p_e \Rightarrow \gamma_p \cdot m_{op} \cdot \upsilon_p = \gamma_e \cdot m_{oe} \cdot \upsilon_e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon_p}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_p^2}{c^2}}} = \frac{1.512 \cdot \left(0.511 MeV/c^2\right)\cdot 0.75 \cdot c}{938.2 MeV/c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon_p}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_p^2}{c^2}}} = 6.176 \cdot 10^{-4} \cdot c \Rightarrow \upsilon_p = 6.176 \cdot 10^{-4} \cdot c$$

<u>Άσκηση 21</u> Serway 46

Η μέση ζωή του π-μεσονίου στο δικό του σύστημα αναφοράς είναι $2.6x10^{-8}$ s. Αν το μεσόνιο κινείται με ταχύτητα 0.95c πόση είναι (a) η μέση ζωή του όπως μετριέται από παρατηρητή που βρίσκεται στη Γη (b) η μέση απόσταση που διανύει προτού διασπαστεί από έναν παρατηρητή στη Γη.

<u>Απάντηση</u>

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.95^2}} \Rightarrow \gamma = 3.203$$

(a) $\tau = \gamma \cdot \tau' \Rightarrow \tau = 3.203 \cdot 2.6 \cdot 10^{-8} \Rightarrow \tau = 8.33 \cdot 10^{-8} s = 0.0833 \mu s$

(b) $s = 0.95 \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 8.33 \cdot 10^{-8} = 24m$

Άσκηση 22 Serway 49

Ένα αντιπρωτόνιο $\overline{p}$ μπορεί να δημιουργηθεί μέσα σε ένα μεγάλο σύγχροτρο από ένα κινούμενο πρωτόνιο υψηλής ενέργειας όταν αυτό συγκρουστεί με ένα πρωτόνιο που ηρεμεί: $p+p \to p+p+p+\overline{p}$. Πόση ελάχιστη κινητική ενέργεια πρέπει να έχει το προσπίπτον πρωτόνιο για να δημιουργηθεί ένα αντιπρωτόνιο.

Απάντηση

Για την ορμή των παραγομένων πρωτονίων-αντιπρωτονίων θα ισχύει: $p' = p/4$ όπου p η ορμή του προσπίπτοντος πρωτονίου.

$$E'^2 = p'^2 \cdot c^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2 \Rightarrow E' = \sqrt{p^2c^2/16 + (m_{op} \cdot c^2)^2}$$

$$E^2 = p^2 \cdot c^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2 \Rightarrow E = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2}$$

Η ολική αρχική ενέργεια είναι:

$$E_{\alpha\rho\chi} = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2} + m_{op} \cdot c^2$$

ενώ η ολική τελική ενέργεια είναι:

$$E_{\tau\varepsilon\lambda} = 4E' \Rightarrow E_{\tau\varepsilon\lambda} = 4\sqrt{p^2c^2/16 + (m_{op} \cdot c^2)^2}$$

Από την αρχή διατήρησης ενέργειας:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{p^2 \cdot c^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2} + m_{op} \cdot c^2 = 4\sqrt{p^2c^2/16 + (m_{op} \cdot c^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 \cdot c^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2 +$$

$$+ 2 \cdot m_{op} \cdot c^2 \cdot \sqrt{p^2 \cdot c^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2} = 16\left(p^2c^2/16 + (m_{op} \cdot c^2)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot m_{op} \cdot c^2 \cdot \sqrt{p^2 \cdot c^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2} = 14 \cdot (m_{op} \cdot c^2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{p^2 \cdot c^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2} = 7m_{op} \cdot c^2 \Rightarrow p^2 \cdot c^2 = 48 \cdot (m_{op} \cdot c^2)^2$$

Άρα $E^2 = p^2 \cdot c^2 + (m_{op} \cdot c^2)^2 = 49 \cdot (m_{op} \cdot c^2)^2 \Rightarrow E = 7 \cdot m_{op} \cdot c^2$

Η κινητική ενέργεια του προσπίπτοντος πρωτονίου θα είναι:

$$K = E - m_{op} \cdot c^2 = 6 \cdot m_{op} \cdot c^2 \Rightarrow K = 6 \cdot 938.2 MeV \Rightarrow K = 5.63 GeV$$

Άσκηση 23 Serway 50

Το μιόνιο είναι ένα ασταθές σωμάτιο το οποίο διασπάται αυθόρμητα σε ένα ηλεκτρόνιο και δύο νετρίνα. Αν ο αριθμός των μιονίων κατά τη χρονική στιγμή t=0 είναι No, ο αριθμός σε χρόνο t είναι $N = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$, όπου τ= 2.2 μs. Υποθέστε ότι τα μιόνια κινούνται με ταχύτητα 0.95c και ότι υπάρχουν $5{\cdot}10^4$ μιόνια στον χρόνο t=0. (a) Πόση είναι η παρατηρούμενη ζωή των μιονίων. (b) Πόσα μιόνια απομένουν μετά από διαδρομή 3 km.

Απάντηση

$$\gamma = \left(\sqrt{1-0.95^2}\right)^{-1} = 3.2026$$

a. $\tau = \gamma \cdot \tau' \Rightarrow \tau = 3.2026 \cdot 2.2 \Rightarrow \tau = 7.0456\mu s$

b. $t = s/\upsilon \Rightarrow t = 3 \cdot 10^3 / \left(0.95 \cdot 3 \cdot 10^8\right) \Rightarrow t = 10.526\mu s$

$$N = N_0 \cdot e^{-t/\tau} \Rightarrow N = 5 \cdot 10^4 \cdot e^{-10.526/7.0456} \Rightarrow N = 1.12 \cdot 10^4$$

ή

$$L = 3000 / 3.2026 \Rightarrow L = 936.7m$$

$$t = s/\upsilon \Rightarrow t = 936.7 / \left(0.95 \cdot 3 \cdot 10^8\right) \Rightarrow t = 3.28\mu s$$

$$N = N_0 \cdot e^{-t/\tau} \Rightarrow N = 5 \cdot 10^4 \cdot e^{-3.28/2.2} \Rightarrow N = 1.12 \cdot 10^4$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ»

Άσκηση 24

Φωτοκύτταρο Na, με έργο εξόδου 2.46 eV, φωτίζεται με φως μήκους κύματος 300 nm. Να βρεθούν (a) Η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων (b) Το μήκος κύματος κατωφλίου και (c) Η μέγιστη ταχύτητα των φωτοηλεκτρονίων.

Απάντηση

(a) Για τα φωτόνια ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} E = h\nu \\ \lambda\nu = c \end{array}\right\} \Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4.14\cdot 10^{-15}\, eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8}\, m\cdot s^{-1}}{300\cdot 10^{-9}\, m} = 4.14\ \ eV$$

$$E = h\nu = 4.14\ \ eV > \varphi = 2.46\ \ eV$$

Άρα γίνεται φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων είναι:

$$T_{\max} = E - \varphi = 4.14 - 2.46 = 1.68\ \ eV$$

(b) Για την συχνότητα κατωφλίου ισχύει:

$$T = 0 \Rightarrow h\nu_c = \varphi \Rightarrow \nu_c = \frac{2.46\ \ eV}{4.14\cdot 10^{-15}\, eV\cdot s} \Rightarrow \nu_c = 5.942\cdot 10^{14}\, s^{-1}$$

Το μήκος κύματος κατωφλίου:

$$\lambda_c = \frac{c}{\nu_c} = \frac{3\cdot 10^{8}\, m\cdot s^{-1}}{5.942\cdot 10^{14}\, s^{-1}} = 505\cdot 10^{-9}\, m = 505\ \ nm \quad (\text{πράσινο})$$

(c) Η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων είναι:

1.68 eV << 10 keV, άρα χρησιμοποιούμε κλασσική φυσική.

$$T = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2T}{m}} \Rightarrow \upsilon = c\sqrt{\frac{2T}{mc^2}} \Rightarrow \upsilon = c\sqrt{\frac{2\cdot 1.68 eV}{511\cdot 10^{3} eV}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = 2.564\cdot 10^{-3} c \Rightarrow \upsilon = 7.7\cdot 10^{7}\, m\cdot s^{-1}$$

Άσκηση 25 Serway 40.21

Φως μήκους κύματος 400 nm φωτίζει φωτοκύτταρα (a) Li με έργο εξόδου 2.3 eV, (b) Be με έργο εξόδου 3.9 eV και (c) Hg με έργο εξόδου 4.5 eV. Σε ποια φωτοκύτταρα θα παρατηρηθεί ρεύμα και ποια είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων;

Απάντηση

Η ενέργεια των φωτονίων:

$$\left.\begin{array}{l} E = h\nu \\ \lambda\nu = c \end{array}\right\} \Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{400\cdot 10^{-9} m} = 3.1 \;\; eV$$

Για να συμβεί φωτοηλεκτρικό φαινόμενο πρέπει $E \geq \varphi$. Άρα θα παρατηρηθεί ρεύμα μόνον στο φωτοκύτταρο του Li.

$$T_{\max} = E - \varphi = 3.1 - 2.3 = 0.8 \;\; eV$$

Άσκηση 26 Serway 40.23

Το ενεργό υλικό σε φωτοκύτταρο έχει έργο εξαγωγής 3.1 eV. Όταν η τάση αντιστραφεί το μ.κ. κατωφλίου είναι ίσο με 270 nm. Ποια είναι η τιμή της αντίστροφης τάσης (τάσης αποκοπής);

Απάντηση

$$E = \frac{hc}{\lambda_c} = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{270\cdot 10^{-9} m} = 4.6 \;\; eV$$

Άρα η ελάχιστη ενέργεια που μπορούν απαιτείται να έχουν τα φωτόνια ώστε να συντελεστεί φ.φ. είναι 4.6 eV. Η τάση αποκοπής για αυτό το μ.κ. θα είναι:

$$e\cdot V_s = E - \varphi = 4.6 - 3.1 = 1.5 \;\; eV \Rightarrow V_s = 1.5 \;\; V$$

Άσκηση 27 Serway 40.24

Όταν φως μήκους κύματος λ φωτίζει φωτοκύτταρο, το δυναμικό αποκοπής είναι 1.6 V ενώ όταν το ίδιο φωτοκύτταρο φωτίζεται από φως μήκους κύματος λ/2 το δυναμικό αποκοπής είναι 5.2 V. Να βρεθεί το μήκος κύματος λ και το έργο εξόδου φ.

Απάντηση

Η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων συνδέεται με το δυναμικό αποκοπής V_s με την σχέση $T_{\max} = eV_s$. Άρα:

$$T_1 = 1.6 \ eV, \ T_2 = 5.2 \ eV$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{hc}{\lambda} - \varphi \\ T_2 &= \frac{2hc}{\lambda} - \varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{4.14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 3 \cdot 10^{8} m \cdot s^{-1}}{5.2eV - 1.6eV} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 345nm$$

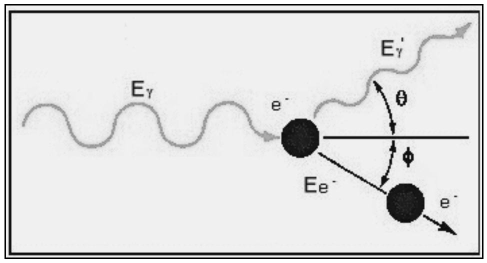
$$\varphi = \frac{hc}{\lambda} - T_1 = \frac{4.14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 3 \cdot 10^{8} m \cdot s^{-1}}{345 \cdot 10^{-9} m} - 1.6eV = 2.0eV$$

Άσκηση 28 Serway 40.26

Ακτίνες X με μήκος κύματος 0.2 nm προσπίπτουν πάνω σε ένα κομμάτι από γραφίτη. Αν η επανεκπεμπόμενη δέσμη ανιχνεύεται σε μία θέση που σχηματίζει γωνία 60° ως προς την διεύθυνση της αρχικής δέσμης, βρείτε:

a) την μετατόπιση Compton Δλ
b) την κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο εκπεμπόμενο ηλεκτρόνιο.

Απάντηση



$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\vartheta) = \frac{hc}{m_0 c^2}(1-\cos\vartheta) \Rightarrow$$

(a) $$\Delta\lambda = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{511\cdot 10^{3} eV}\left(1-\cos 60^\circ\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = 2.43\cdot 10^{-12} m(1-1/2) = 1.215\cdot 10^{-12} m$$

(b) $$E_{e^-} = E_\gamma - E_\gamma^{'}$$

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{0.2\cdot 10^{-9} m} = 6210 eV$$

$$\lambda^{'} = \lambda + \Delta\lambda = 0.2\cdot 10^{-9} + 1.2\cdot 10^{-12} = 0.2012\cdot 10^{-9} m$$

$$E_\gamma^{'} = \frac{hc}{\lambda^{'}} = 6172.5 eV$$

$$E_{e^-} = 37.5 eV$$

Άσκηση 29 Serway 40.27

Ποια γωνία σκέδασης θα έχει ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση του μήκους κύματος κατά 0.02% μιας δέσμης ακτίνων X με μήκος κύματος 1 nm.

Απάντηση

$$\Delta\lambda = 0.02\cdot 10^{-2}\cdot 1nm = 2\cdot 10^{-13} m$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\vartheta) = \frac{hc}{m_0 c^2}(1-\cos\vartheta) \Rightarrow$$

$$2\cdot 10^{-13} m = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{511\cdot 10^{3} eV}(1-\cos\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\cos\vartheta = 8.23\cdot 10^{-2} \Rightarrow \vartheta = 23.4^{\circ}$$

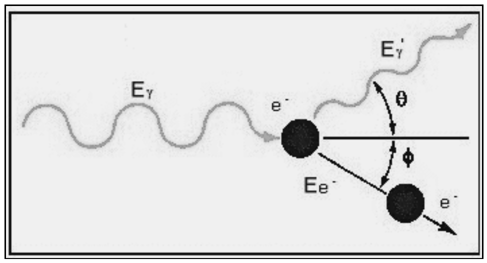
Άσκηση 30 Serway 40.28

Ένα φωτόνιο ακτίνων X έχει μήκος κύματος 0.45 nm και εκτρέπεται κατά 23° μετά από σκέδαση με ελεύθερο ηλεκτρόνιο.

a) Ποια είναι η κινητική ενέργεια του εκπεμπομένου ηλεκτρονίου;

b) Ποια είναι η ταχύτητά του;

Απάντηση



(a)

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\vartheta) = \frac{hc}{m_0 c^2}(1-\cos\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{511\cdot 10^{3} eV}\left(1-\cos 23^\circ\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = 2.43\cdot 10^{-12} m\cdot 0.0795 = 1.93\cdot 10^{-13} m$$

$$\left.\begin{array}{l} E_\gamma = \dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{0.45\cdot 10^{-9} m} = 2760 eV \\ E_\gamma^{'} = \dfrac{hc}{\lambda^{'}} = \dfrac{hc}{\lambda+\Delta\lambda} = 2758.8 eV \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{e^-} = E_\gamma - E_\gamma^{'} = 1.2 eV$$

(b)

$E_{e^-} < 10 keV$ Άρα δεν χρειάζονται σχετικιστικές διορθώσεις.

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2E_{e^-}}{m_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.2 eV}{511\cdot 10^{3} eV/c^2}} = c\cdot 2.17\cdot 10^{-3} = 6.5\cdot 10^{5} m\cdot s^{-1}$$

Άσκηση 31 Serway 40.29

Φωτόνιο ακτίνων X και μήκους κύματος 0.03 nm συγκρούεται με ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο.

a) Αν η μετατόπιση στο μήκος κύματος είναι ίση με το μήκος κύματος Compton, ποια θα είναι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την κρούση;

b) Ποια είναι η ταχύτητά του;

Απάντηση

(a)

$$\Delta\lambda = \lambda_C (= \frac{h}{m_0 c}) = 0.00243 nm \Rightarrow 1 - \cos\vartheta = 1 \Rightarrow \vartheta = 90^\circ$$

$$\left.\begin{aligned} E_\gamma &= \frac{hc}{\lambda} = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{0.03\cdot 10^{-9} m} = 41.4\ \ keV \\ E_\gamma^{'} &= \frac{hc}{\lambda^{'}} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = 38.3 eV \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{e^-} = E_\gamma - E_\gamma^{'} = 3.1\ \ keV$$

(b) $E_{e^-} < 10 keV$ Άρα δεν χρειάζονται σχετικιστικές διορθώσεις.

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2E_{e^-}}{m_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3.1\cdot 10^{3} eV}{511\cdot 10^{3} eV / c^{2}}} = c\cdot 0.11 = 3.3\cdot 10^{7} m\cdot s^{-1}$$

Άσκηση 32 Serway 40.30

Ακτίνες X με ενέργεια 300 keV υφίστανται σκέδαση από έναν στόχο. Αν οι σκεδασθείσες ακτίνες ανιχνεύονται σε γωνία 37° σε σχέση με τις προσπίπτουσες ακτίνες, βρείτε:

a) Την μετατόπιση Compton σε αυτή τη γωνία

b) Την ενέργεια της σκεδασθείσας ακτίνας

c) Την ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την κρούση

Απάντηση

(a)

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\vartheta) = \frac{hc}{m_0 c^2}(1-\cos\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{511\cdot 10^{3} eV}\left(1-\cos 37^\circ\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = 2.43\cdot 10^{-12} m\cdot 0.201 = 4.89\cdot 10^{-13} m$$

(b)

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} + \Delta\lambda =$$

$$= \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{300\cdot 10^{3} eV} + 4.89\cdot 10^{-13} m =$$

$$= 4.14\cdot 10^{-12} + 4.89\cdot 10^{-13} = 4.63\cdot 10^{-12} m$$

$$E_\gamma' = \frac{hc}{\lambda'} = 2.7\cdot 10^{5} eV$$

(c)

$$E_{e^-} = E_\gamma - E_\gamma' = 3\cdot 10^{5} - 2.7\cdot 10^{5} = 3\cdot 10^{4} eV$$

Άσκηση 33

Φωτόνιο ενέργειας 250 keV υφίσταται σκέδαση Compton και ανιχνεύεται σε γωνία 155°. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σκεδασθέντος ηλεκτρονίου.

Απάντηση

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{250\cdot 10^{3}} = 4.968\cdot 10^{-12} m$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}\left(1-\cos\vartheta\right) = \frac{hc}{m_0 c^2}\left(1-\cos\vartheta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{511\cdot 10^{3} eV}\left(1-\cos 155^\circ\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = 2.43\cdot 10^{-12} m\cdot 1.906 = 4.63\cdot 10^{-12} m$$

$$E_\gamma' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda+\Delta\lambda} = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{4.968\cdot 10^{-12} + 4.63\cdot 10^{-12}} = 129.4 keV$$

$$E_{e^-} = E_\gamma - E_\gamma' = 250 - 129.4 = 120.6 keV$$

(Αν δεν ληφθούν υπόψη οι σχετικιστικές διορθώσεις η ταχύτητα του e- υπολογίζεται:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2E_{e^-}}{m_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 120.6 keV}{511 keV / c^2}} = c\cdot 0.687 = 2.06\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1})$$

$$E = E_{e^-} + m_0 c^2 \Rightarrow E = 120.6 + 511 = 631.6 keV$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{E} = \frac{511 keV}{631.6 keV} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0.81 \Rightarrow \upsilon = 0.588c = 1.76\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}$$

Άσκηση 34 Serway 40.33

Ακτίνες Χ, μήκους κύματος ίσου με 0.12 nm, υφίστανται σκέδαση Compton.

(a) Βρείτε το μήκος κύματος των φωτονίων που ανιχνεύονται σε γωνίες σκέδασης 30°, 60°, 90°, 120°, 150° και 180°, αντίστοιχα.

(b) Βρείτε την ενέργεια των εκπεμπομένων ηλεκτρονίων που αντιστοιχούν σε διευθύνσεις των παραπάνω σκεδασθέντων ακτίνων Χ.

(c) Ποιά από αυτές τις διευθύνσεις προσδίδει στο ηλεκτρόνιο τη μέγιστη ενέργεια.

Απάντηση

(a)

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\vartheta) = \frac{hc}{m_0 c^2}(1-\cos\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{511\cdot 10^{3} eV}(1-\cos 30°) \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = 2.43\cdot 10^{-12} m\cdot 0.134 = 3.26\cdot 10^{-13} m$$

$$30°: \lambda' = 0.12 + 0.00033 = 0.12033 nm$$
$$60°: \lambda' = 0.12 + 0.0012 = 0.1212 nm$$
$$90°: \lambda' = 0.12 + 0.0024 = 0.1224 nm$$
$$120°: \lambda' = 0.12 + 0.0036 = 0.1236 nm$$
$$150°: \lambda' = 0.12 + 0.0045 = 0.1245 nm$$
$$180°: \lambda' = 0.12 + 0.0049 = 0.1249 nm$$

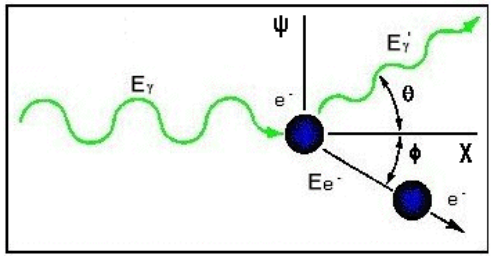
(b) $E = h\cdot c/\lambda = 10.35 keV$

$$30°: E' = 10.322 keV \Rightarrow E_e = 28 eV$$
$$60°: E' = 10.25 keV \Rightarrow E_e = 102 eV$$
$$90°: E' = 10.15 keV \Rightarrow E_e = 203 eV$$
$$120°: E' = 10.05 keV \Rightarrow E_e = 301 eV$$
$$150°: E' = 9.98 keV \Rightarrow E_e = 374 eV$$
$$180°: E' = 9.94 keV \Rightarrow E_e = 406 eV$$

Άσκηση 35 Serway 40.34

Φωτόνιο ακτίνων X με μήκος κύματος 0.5 nm αποκλίνει κατά γωνία 134°, μετά από σκέδαση με ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Σε ποια γωνία ως προς την προσπίπτουσα δέσμη θα βρίσκεται το ελεύθερο ηλεκτρόνιο;

Απάντηση



$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\vartheta) = \frac{hc}{m_0 c^2}(1-\cos\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{511\cdot 10^{3} eV}\left(1-\cos 134^\circ\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = 2.43\cdot 10^{-12} m\cdot 1.695 = 4.12\cdot 10^{-12} m$$

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = 2484 eV$$

$$E_\gamma' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda+\Delta\lambda} = \frac{4.14\cdot 10^{-15} eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{0.5\cdot 10^{-9} m + 4.12\cdot 10^{-12} m} = 2463.7 eV$$

$$E_{e^-} = E_\gamma - E_\gamma' = 2484 - 2463.7 = 20.3 eV$$

$$\overrightarrow{p_\gamma} = \overrightarrow{p_\gamma'} + \overrightarrow{p_e} \Rightarrow (\acute{\alpha}\xi o\nu\alpha - \psi :)\, p_\gamma' \cdot \sin\vartheta = p_e \cdot \sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_\gamma'}{c}\sin\vartheta = \frac{\sqrt{E_e\cdot 2 m_0 c^2}}{c}\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2463.7 eV \sin 134^\circ = \sqrt{20.3 eV\cdot 2\cdot 511\cdot 10^{3} eV}\,\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = 0.389 \Rightarrow \varphi = 22.9^\circ$$

Άσκηση 36 Serway 40.35

Φωτόνιο, μήκους κύματος 0.0016 nm, σκεδάζεται από ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Για ποιά γωνία σκέδασης του φωτονίου το εκπεμπόμενο ηλεκτρόνιο και το σκεδασθέν φωτόνιο έχουν την ίδια κινητική ενέργεια.

Απάντηση

$$E_\gamma = h\cdot c/\lambda = 4.14\cdot 10^{-15}\cdot 3\cdot 10^{8}/16\cdot 10^{-13} = 776.25keV$$

$$E'_\gamma = E_e = E_\gamma/2 \Rightarrow E'_\gamma = 388.13keV \Rightarrow h\cdot c/\lambda' = 388.13eV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda' = 3.2\cdot 10^{-12}m \Rightarrow \Delta\lambda = 3.2\cdot 10^{-12} - 1.6\cdot 10^{-12} = 1.6\cdot 10^{-12}m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\cos\theta = 1.6\cdot 10^{-12}/2.43\cdot 10^{-12} = 0.658 \Rightarrow \theta = 70°$$

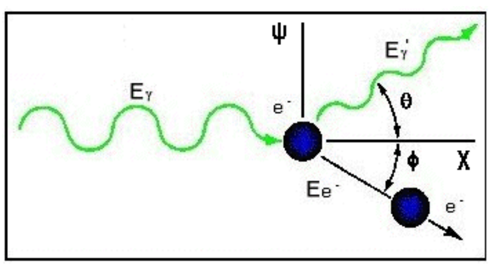
Άσκηση 37 Serway 40.57

Ακτίνες γάμμα (φωτόνια υψηλής ενέργειας) που έχουν ενέργεια ίση με 1.02 MeV σκεδάζονται από ηλεκτρόνια τα οποία αρχικά ηρεμούσαν. Αν η σκέδαση είναι συμμετρική (φ=θ), βρείτε:

a) την γωνία σκέδασης θ

b) την ενέργεια των σκεδασθέντων φωτονίων

Απάντηση



$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{4.14\cdot 10^{-15}eV\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8}m\cdot s^{-1}}{1.02\cdot 10^{6}eV} = 1.218\cdot 10^{-12}m$$

Αρχή διατήρησης ορμής στους άξονες χ και ψ:

$$\psi : p_{\psi e} = p'_{\psi\gamma} \Rightarrow m\upsilon\cdot\sin(\varphi) = \frac{h\nu'}{c}\sin(\theta) \Rightarrow m\upsilon = \frac{h\nu'}{c} \qquad (1)$$

$$x: p_{x\gamma}=p_{xe}+p'_{x\gamma} \Rightarrow \frac{h\nu}{c}=m\upsilon\cdot\cos(\varphi)+\frac{h\nu'}{c}\cos(\theta) \qquad (2)$$

(1) και (2): $$\frac{h\nu}{c}=2\frac{h\nu'}{c}\cos(\theta)\Rightarrow\cos(\theta)=\frac{\nu}{2\nu'}\Rightarrow\cos(\theta)=\frac{\lambda'}{2\lambda} \qquad (3)$$

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=2.43\cdot10^{-12}(1-\cos(\theta))\Rightarrow\lambda'=\lambda+2.43\cdot10^{-12}\left(1-\frac{\lambda'}{2\lambda}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda'\left(1+\frac{2.43\cdot10^{-12}}{2\cdot1.218\cdot10^{-12}}\right)=1.218\cdot10^{-12}+2.43\cdot10^{-12}\Rightarrow\lambda'=1.82\cdot10^{-12}m$$

(3): $$\cos(\theta)=\frac{\lambda'}{2\lambda}=\frac{1.826}{2\cdot1.218}\Rightarrow\theta=41.4^\circ$$

$$E'_\gamma=h\cdot c/\lambda'=4.14\cdot10^{-15}\cdot3\cdot10^{8}/1.826\cdot10^{-12}=680\ \ keV$$

Άσκηση 38 Serway 40.58

Αν η μέγιστη ενέργεια που αποκτά ηλεκτρόνιο ατά την διάρκεια μιας σκέδασης Compton είναι 30 keV ποιο είναι το μ.κ. του προσπίπτοντος φωτονίου;

Απάντηση

Από την αρχή διατήρησης ενέργειας: $E_{e^-}=E_\gamma-E_\gamma^{'}$

Το ηλεκτρόνιο προσλαμβάνει την μέγιστη κινητική ενέργεια όταν το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχει την ελάχιστη δυνατή, δηλ. το μεγαλύτερο μήκος κύματος:

$$E'_{\gamma,\max}=h\cdot c/\lambda'_{\max}=h\cdot c/(\lambda+\Delta\lambda_{\max})$$

$$\Delta\lambda=\frac{h}{m_o c}(1-\cos\theta)$$

$\Delta\lambda_{\max}$ όταν $(1-\cos\theta)_{\max}\Rightarrow\cos\theta=-1\Rightarrow\theta=180^\circ$

$$E_{e,\max} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda_{\max}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \frac{2h}{m_o c}} = hc\left[\frac{\nu}{c} - \frac{1}{\frac{c}{\nu} + \frac{2hc}{m_o c^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{e,\max} = hc\left[\frac{h\nu}{hc} - \frac{1}{\frac{hc}{h\nu} + \frac{2hc}{m_o c^2}}\right] = h\nu - \frac{h\nu \cdot m_o c^2}{m_o c^2 + 2h\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{e,\max} = E_\gamma\left[1 - \frac{m_o c^2}{m_o c^2 + 2 \cdot E_\gamma}\right] \quad \left(m_o c^2 = 511 \;\; keV\right)$$

$$E_{e,\max} = 30 \;\; keV \Rightarrow 30 = E_\gamma \frac{2E_\gamma}{511 + 2E_\gamma} \Rightarrow 2E_\gamma^2 - 60E_\gamma - 30 \cdot 511 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_\gamma = 104 \;\; keV$$

Άσκηση 38 **Serway 40.63**

Φωτόνιο ενέργειας 0.1 MeV υφίσταται σκέδαση Compton και η γωνία σκέδασης είναι ίση με 60^{o}. Βρείτε την

a) την ενέργεια του σκεδασθέντος φωτονίου

b) την ενέργεια του εκπεμπόμενου ηλεκτρονίου

c) την γωνία φ του εκπεμπόμενου ηλεκτρονίου

Απάντηση

$$\Delta\lambda = \lambda_C\left(1 - \cos\theta\right) = 2.43 \cdot 10^{-12}\left(1 - \cos 60\right) = 1.215 \cdot 10^{-12} m$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{4.14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 3 \cdot 10^{8} m \cdot s^{-1}}{0.1 \cdot 10^{6} eV} = 1.242 \cdot 10^{-11} m$$

a) $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda \Rightarrow \lambda' = 1.3635 \cdot 10^{-11} m \Rightarrow E'_\gamma = hc/\lambda' = 91.09 \;\; keV$

b) $E_{e^-} = E_\gamma - E_\gamma^{'} = 100 - 91.09 = 8.91 \;\; keV$

c) Στον άξονα ψ η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\frac{h\nu'}{c}\sin\theta = \gamma \cdot m_o \upsilon \cdot \sin\varphi \qquad (1)$$

$$E_{e,o\lambda} = mc^2 = \gamma \cdot m_o c^2 \Rightarrow 511 + 8.9 = \gamma \cdot 511 \Rightarrow \gamma = 1.0174 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = 1.0174 \Rightarrow \upsilon = 0.184c$$

Από την σχέση (1):

$$91.09 \sin 60 = 1.0174 \cdot m_o c^2 \cdot 0.184 \cdot \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 0.8236 \Rightarrow \varphi = 55.4^\circ$$

Serway 40.38

(a) Υπολογίστε τα μικρότερα και τα μεγαλύτερα μ.κ. στο φάσμα του υδρογόνου για κάθε μία από τις ακόλουθες σειρές: Lyman, Balmer, Paschen και Brackett.

(b) Υπολογίστε την ενέργεια (σε eV) των φωτονίων με την μεγαλύτερη ενέργεια που παράγουν αυτές τις σειρές.

Απάντηση

(a) $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$ όπου $n_f < n_i$, n_f=1 για την Lyman, n_f=2 για την Balmer, n_f=3 για την Paschen και n_f=4 για την Brackett. Το μικρότερο μ.κ. αντιστοιχεί στις μεγαλύτερες ενεργειακές μεταπτώσεις: $n_i = \infty$, ενώ το μεγαλύτερο μ.κ. στις μικρότερες ενεργειακές μεταπτώσεις: $n_i = n_f + 1$.

Lyman:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = 1.0973732 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2}\right) \Rightarrow \lambda_{\max} = 121.5nm$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = 1.0973732 \cdot 10^7 \frac{1}{1} \Rightarrow \lambda_{\min} = 91.1nm$$

Balmer: $\lambda_{\max} = 656.1nm$, $\lambda_{\min} = 364.5nm$

Paschen: $\lambda_{\max} = 1.88\mu m$, $\lambda_{\min} = 820.1nm$

Brackett: $\lambda_{\max} = 4.05\mu m$, $\lambda_{\min} = 1.46\mu m$

(b) Lyman: $E = \dfrac{hc}{\lambda_{\min}} = 13.6eV$, Balmer: $E = 3.4eV$, Paschen: $E = 1.51eV$,

Brackett: $E = 0.85eV$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

«ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΤΟΜΟΥ»

Serway 40.39

(a) Ποιά τιμή του n αντιστοιχεί στην γραμμή της σειράς Lyman για το άτομο του υδρογόνου η οποία έχει μήκος κύματος 94.96 nm.

(b) Μπορούσε αυτό το μ.κ να αντιστοιχεί σε γραμμή των σειρών Paschen ή Brackett;

Απάντηση

(a)
$$\frac{1}{94.96\cdot 10^{-9}m} = R_H\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{94.96\cdot 10^{-9}m} = 1.0973732\cdot 10^7 m\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0.95963 = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\Rightarrow \frac{1}{n^2} = 4.036\cdot 10^{-2}\Rightarrow n = 4.98\cong 5$$

(b)
$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2} = 0.95963\begin{cases} Balmer: \frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2} < 0.95963 \\ Paschen: \frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2} < 0.95963 \end{cases}$$

Serway 40.40

Θεωρήστε ότι σε έναν μεγάλο αριθμό ατόμων υδρογόνου όλα τα ηλεκτρόνια βρίσκονται στην κατάσταση n=4.

(a) Πόσα διαφορετικά μ.κ. μπορεί να παρατηρηθούν στο φάσμα εκπομπής αυτών των ατόμων.

(b) Ποιό είναι το μικρότερο μήκος κύματος που μπορεί να παρατηρηθεί. Σε ποιά σειρά ανήκει αυτό.

<u>Απάντηση</u>

(a) Οι δυνατές μεταπτώσεις είναι :

$n = 4 \to n = 3$

$n = 4 \to n = 2$

$n = 4 \to n = 1$

$n = 3 \to n = 2$

$n = 3 \to n = 1$

$n = 2 \to n = 1$

Άρα θα παρατηρηθούν 6 μ.κ. στο φάσμα εκπομπής.

(b) Το μικρότερο μ.κ. αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο ενεργειακό άλμα, δηλ. στο $n = 4 \to n = 1$.

$$\frac{1}{\lambda} = 1.0973732 \cdot 10^7 m \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) \Rightarrow \lambda = 97.2nm \ \ (Lyman)$$

Serway 40.46

Άτομο Η απο την θεμελιώδη κατάσταση απορροφά φωτόνιο και μεταπηδά στην κατάσταση n=4.

(c) Ποια είναι η ενέργεια του απορροφηθέντος φωτονίου.

(d) Ποια είναι η ενέργεια του φωτονίου που θα εκπέμψει το άτομο όταν επιστρέψει στην θεμελιώδη κατάσταση.

Απάντηση

$$E_{1,H} = -13.6eV$$

$$E_n = \frac{E_{1,H}}{n^2} \Rightarrow E_4 = \frac{-13.6}{4^2} = -0.85eV$$

$$\Delta E = E_1 - E_4 = -13.6 + 0.85 = -12.75eV$$

(Το – στο *ΔΕ* σημαίνει ότι προσδίδεται ενέργεια στο άτομο.)

(a) $E_{\varphi} = 12.75eV$

(b) $E_{\varphi} = 12.75eV$

(Θεωρείται αμελητέα η ενέργεια ανάκρουσης του ατόμου).

Serway 40.47

Άτομο Η απο την κατάσταση n=6 εκπέμπει φωτόνιο και μεταπηδά στην κατάσταση n=2.

(a) Ποια είναι η ενέργεια,

(b) η συχνότητα,

(c) και το μήκος κύματος του φωτονίου που εκπέμφθηκε.

<u>Απάντηση</u>

$$E_{1,H} = -13.6eV$$

$$E_n = \frac{E_{1,H}}{n^2} \Rightarrow E_6 = \frac{-13.6}{6^2} = -0.38eV\,,\ E_2 = -3.4eV$$

(a) $\Delta E = E_6 - E_2 = -0.38 + 3.4 = 3.02eV \Rightarrow E_\varphi = 3.02eV$

(b) $E_\varphi = hv \Rightarrow v = \dfrac{3.02eV}{4.14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s} \Rightarrow v = 7.3 \cdot 10^{14} s^{-1}$

(c) $\lambda = \dfrac{c}{v} = \dfrac{3 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}}{7.3 \cdot 10^{14} s^{-1}} = 4.11 \cdot 10^{-7} m = 411nm$

Serway 40.48

Ποιά είναι η ενέργεια φωτονίου που μπορεί να προκαλέσει διέγερση ατόμου Η από την κατάσταση

(a) n=3 στην n=5,

(b) και n=5 στην n=7.

Απάντηση

$E_{1,H} = -13.6eV$

$$E_n = \frac{E_{1,H}}{n^2} \Rightarrow E_3 = \frac{-13.6}{3^2} = -1.511eV\ , E_5 = -0.544eV\ , E_7 = -0.278eV$$

(a) $\Delta E = E_3 - E_5 = -1.511 + 0.544 = -0.967eV \Rightarrow E_\varphi = 0.967eV$

(b) $\Delta E = E_5 - E_7 = -0.544 + 0.278 = -0.266eV \Rightarrow E_\varphi = 0.266eV$

(Το – στο *ΔΕ* σημαίνει ότι κατά τη διέγερση προσδίδεται ενέργεια στο άτομο.)

Serway 40.49

Τέσσερα δυνατά άλματα για το άτομο του Η αναφέρονται παρακάτω:

(A) $n_i = 2; n_f = 5$

(B) $n_i = 5; n_f = 3$

(C) $n_i = 7; n_f = 4$

(D) $n_i = 4; n_f = 7$

(a) Ποιο άλμα θα εκπέμψει το φωτόνιο με το μικρότερο μήκος κύματος;

(b) Σε ποιο άλμα το άτομο κερδίζει τη μεγαλύτερη ενέργεια;

(c) Σε ποιο άλμα ή σε ποια άλματα το άτομο χάνει ενέργεια;

<u>*Απάντηση*</u>

$E_{1,H} = -13.6eV$

$E_n = \dfrac{E_{1,H}}{n^2} \Rightarrow E_2 = \dfrac{-13.6}{2^2} = -3.4eV$, $E_3 = -1.511eV$, $E_4 = -0.85eV$,

$E_5 = -0.544eV$, $E_7 = -0.278eV$

(a) Εκπομπή φωτονίου $\Rightarrow E_i > E_f \Rightarrow \dfrac{E_{1,H}}{n_i^2} > \dfrac{E_{1,H}}{n_f^2} \Rightarrow n_i > n_f$.

Άρα πιθανά είναι τα άλματα B, C:

$\Delta E_B = E_5 - E_3 = -0.544 + 1.511 = 0.967eV$

$\Delta E_C = E_7 - E_4 = -0.278 + 0.85 = 0.572eV$

Το μήκος κύματος είναι αντιστρόφως ανάλογο της ενέργειας του φωτονίου $\left(\lambda = hc/E_\varphi\right)$. Άρα το άλμα που θα εκπέμψει το φωτόνιο με το μικρότερο μήκος κύματος είναι το B.

(b) Το άτομο κερδίζει ενέργεια όταν:

$$E_f > E_i \Rightarrow \frac{E_{1,H}}{n_f^2} > \frac{E_{1,H}}{n_i^2} \Rightarrow n_f > n_i$$

Άρα πιθανά είναι τα άλματα A, D:

$\Delta E_A = E_2 - E_5 = -3.4 + 0.544 = -2.856eV$

$\Delta E_D = E_4 - E_7 = -0.85 + 0.278 = -0.572eV$

(Το – στο *ΔE* σημαίνει ότι κατά τα άλματα αυτά προσδίδεται ενέργεια στο άτομο.)

Επομένως το άτομο κερδίζει περισσότερη ενέργεια κατά το άλμα A: n=2 $\rightarrow$ n=5.

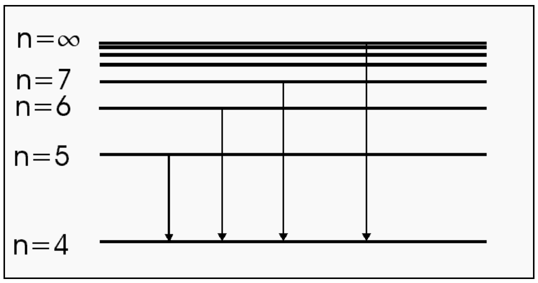
(c) Το άτομο χάνει ενέργεια όταν $E_i > E_f \Rightarrow \frac{E_{1,H}}{n_i^2} > \frac{E_{1,H}}{n_f^2} \Rightarrow n_i > n_f$

Επομένως χάνει ενέργεια κατά τα άλματα: B, C.

Serway 40.50

Υπολογίστε το μεγαλύτερο και μικρότερο μήκος κύματος στη σειρά Brackett και την ενέργεια των φωτονίων που αντιστοιχεί σε αυτά τα μήκη κύματος.

<u>*Απάντηση*</u>



Για την σειρά Brackett ισχύει:

$$\Delta E_n = E_{1,H}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4^2}\right) \text{ όπου}$$

$n = 5,6,...$

Το φωτόνιο με την ελάχιστη ενέργεια εκπέμπεται κατά την μετάπτωση n=5 στην n=4, ενώ αυτό με την μέγιστη ενέργεια κατά την μετάπτωση n=∂ στην n=4. Άρα:

$$\Delta E_{\min} = E_{1,H}\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 0.306eV$$

$$\Delta E_{\max} = E_{1,H}\left(0 - \frac{1}{4^2}\right) = 0.85eV$$

Το μήκος κύματος είναι αντιστρόφως ανάλογο της ενέργειας του φωτονίου $\left(\lambda = hc/E_{\varphi}\right)$.

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{\Delta E_{\min}} = \frac{4.14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 3 \cdot 10^{8} m \cdot s^{-1}}{0.306eV} = 4.059 \cdot 10^{-6} m$$

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{\Delta E_{\max}} = \frac{4.14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 3 \cdot 10^{8} m \cdot s^{-1}}{0.85eV} = 1.461 \cdot 10^{-6} m$$

Serway 40.55

Φαινόμενο Auger: Ένα ηλεκτρόνιο στο άτομο του χρωμίου (Z=24) μεταπηδά από την κατάσταση n=2 στην n=1 χωρίς να εκπέμψει κανένα φωτόνιο. Αντί γι' αυτό, η πλεονάζουσα ενέργεια μεταφέρεται σε ένα εξωτερικό ηλεκτρόνιο (στην κατάσταση n=4) το οποίο εκπέμπεται από το άτομο. (*Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **Φαινόμενο Auger** και το ηλεκτρόνιο που εκπέμπεται ονομάζεται **Ηλεκτρόνιο Auger***). Χρησιμοποιήστε την θεωρία του Bohr για να υπολογίσετε την ενέργεια του ηλεκτρονίου Auger.

Απάντηση

$$E_{n,Cr} = E_{1,H}\frac{Z^2}{n^2} \Rightarrow \Delta E_{Cr} = -13.6 \cdot 24^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = 5875.2eV$$

$$E_{4,Cr} = E_{1,H}\frac{Z^2}{4^2} = -489.6eV$$

$$T_e = 5875.2 - 489.6 = 5385.6eV$$

Serway 40.59

Το μιόνιο είναι σωματίδιο με φορτίο ίσο με το φορτίο e και μάζα 207 φορές μεγαλύτερη από αυτήν του e. Ποιά είναι η ενέργεια και η ακτίνα στην θεμελιώδη κατάσταση του μιονικού μολύβδου ($^{208}_{82}Pb$), σύμφωνα με την θεωρία του Bohr.

<u>*Απάντηση*</u>

$$\mu = \frac{m_\mu \cdot M_{Pb}}{m_\mu + M_{Pb}} \cong \frac{207m_0 \cdot 208 \cdot 1836m_0}{207m_0 + 208 \cdot 1836m_0} = 206.9m_0$$

$$r_{n,Pb} = r_{1,H} \frac{m_0}{\mu} \frac{n^2}{Z} = 5 \cdot 10^{-11} m \frac{m_0}{206.9m_0} \frac{1}{82} = 2.95 \cdot 10^{-15} m$$

$$E_{n,Pb} = E_{1,H} \frac{\mu}{m_0} \frac{Z^2}{n^2} = -13.6 \frac{206.9m_0}{m_0} \frac{82^2}{1} = -18.9MeV$$

Serway 40.61

(a) Υπολογίστε την ενέργεια στην θεμελιώδη και την πρώτη διεγερμένη κατάσταση του μυονικού δευτερίου.

(b) Ποιο είναι το μήκος κύματος του φωτονίου που εκπέμπεται κατά την αποδιέγερση του ατόμου από την πρώτη διεγερμένη στην βασική κατάσταση;

<u>*Απάντηση*</u>

Στο μυονικό ${}_{1}^{2}H$ (D) το ηλεκτρόνιο έχει αντικατασταθεί από μυόνιο για το οποίο $m_{\mu} = 207 m_0$:

(a) $$E_{n,D} = E_{1,H} \frac{\mu_D}{m_0} \frac{Z^2}{n^2}$$

$$\mu_D = \frac{m_{\mu} \cdot M_D}{m_{\mu} + M_D} \cong \frac{207 m_0 \cdot 2 \cdot 1836 m_0}{207 m_0 + 2 \cdot 1836 m_0} = 196 m_0$$

$$E_{1,D} = -13.6 \cdot 196 = -2665 eV$$

$$E_{2,D} = -13.6 \cdot 196 \frac{1}{2^2} = -666 eV$$

(b) $$\lambda = \frac{hc}{E_{\gamma}} = \frac{4.14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 3 \cdot 10^{8} m \cdot s^{-1}}{-666 eV + 2665 eV} = 6.2 \cdot 10^{-10} m = 0.62 nm$$

Serway 40.66

Τα μ.κ. των φασματικών γραμμών εξαρτώνται κατά κάποιο βαθμό από την πυρηνική μάζα. Υπολογίστε την μετατόπιση της α-Balmer (ως προς το υδρογόνο) για το δευτέριο και το τρίτιο.

<u>Απάντηση</u>

$$\mu_H = \frac{m_e \cdot 1836 \cdot m_e}{m_e + 1836 \cdot m_e} = \frac{1836}{1837} m_e = 0.9994556 \cdot m_e$$

$$\mu_D = \frac{m_e \cdot 2 \cdot 1836 \cdot m_e}{m_e + 2 \cdot 1836 \cdot m_e} = \frac{3672}{3673} m_e = 0.9997277 \cdot m_e$$

$$\mu_T = \frac{m_e \cdot 3 \cdot 1836 \cdot m_e}{m_e + 3 \cdot 1836 \cdot m_e} = \frac{5508}{5509} m_e = 0.9998185 \cdot m_e$$

$$E = E_{1,H} \frac{\mu}{m_e} \frac{Z^2}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,H} = -3.398149 \ \ eV, \ \ E_{3,H} = -1.510289 \ \ eV \Rightarrow \\ E_{2,D} = -3.399074 \ \ eV, \ \ E_{3,D} = -1.510700 \ \ eV \Rightarrow \\ E_{2,T} = -3.399383 \ \ eV, \ \ E_{3,T} = -1.510837 \ \ eV \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_H = 1.88786 \ \ eV, E_D = 1.88838 \ \ eV, E_T = 1.88854 \ \ eV$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_H = 6.57888 \cdot 10^{-7} \, m \\ \lambda_D = 6.57708 \cdot 10^{-7} \, m \\ \lambda_T = 6.57649 \cdot 10^{-7} \, m \end{cases}$$

Serway 40.71

Ένα ηλεκτρόνιο που αρχικά βρίσκεται στην κατάσταση n=3 σε ένα μονοηλεκτρονικό άτομο μάζας M μεταπηδά στη θεμελιώδη κατάσταση, όπου n=1. Αποδείξτε οτι η ταχύτητα ανάκρουσης δίνεται προσεγγιστικά από την σχέση: $\upsilon = (8hR)/9M$

Απάντηση

Θεωρώντας αρχικά ακίνητο άτομο η ΑΔΟ:

$$p_{\alpha\tau o\mu o\upsilon} = p_{\gamma} \Rightarrow M\upsilon = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow M\upsilon = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow M\upsilon = hR_H\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9}\right) \Rightarrow \upsilon = \frac{8hR_H}{9M}$$