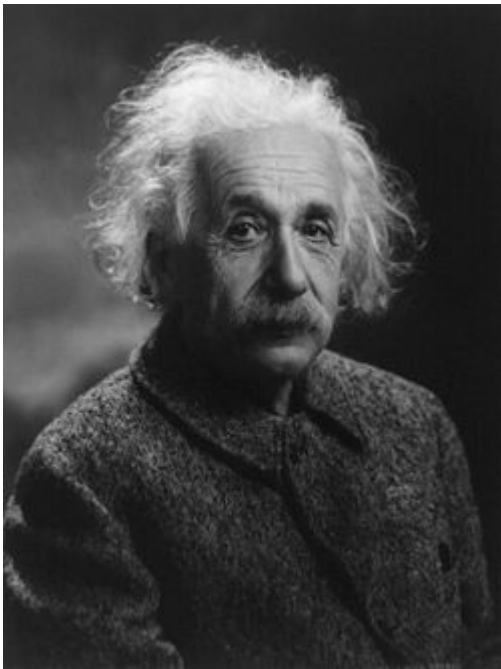


# Στοιχεία της Θεωρίας της Σχετικότητας



Άλμπερτ Αϊνστάιν 1905



# Αξιιώματα Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, Αϊνστάιν (1905)

μοναδική γοητεία εξαιτίας της απλότητας και κομψότητας των δύο αξιωμάτων πάνω στα οποία στηρίζεται:

- Οι νόμοι της φύσης είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Κάθε σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι κι αυτό αδρανειακό

- Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς



Μία κάμερα-αστραπή, που είναι σε θέση να «συλλάβει» ακόμα και την ταχύτητα του φωτός, «έπιασε» για πρώτη φορά ακτίνα φωτός να ταξιδεύει μέσω ενός διαφανούς πλαστικού μπουκαλιού.

Κάθε ακίνητη εικόνα της έχει ταχύτητα φωτοφράκτη ένα τρισεκατομμυριοστό του δευτερολέπτου.

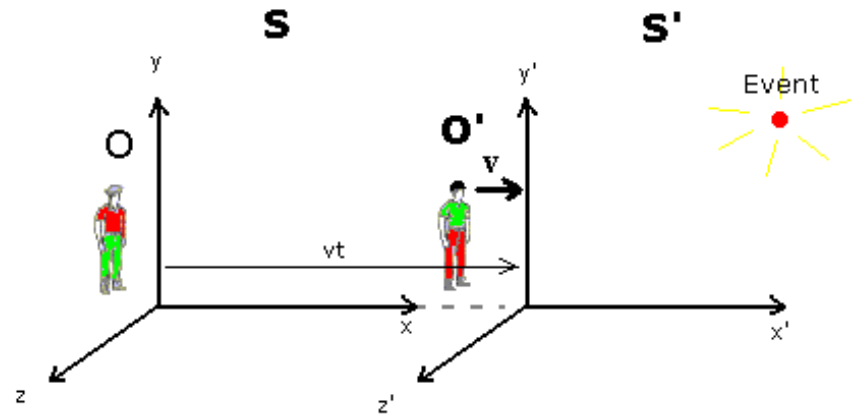
# Ειδική Σχετικότητα

Το **κάθε αδρανειακό** σύστημα αναφοράς δηλαδή, διέπεται από τους **ίδιους νόμους** και ένας παρατηρητής σ' αυτό, μπορεί να θεωρεί το σύστημα που βρίσκεται ως **"ακίνητο"**, ενώ η ταχύτητα του φωτός είναι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα σταθερή.

Γι' αυτό και **δεν υπάρχει ειδικό, προνομιακό, σύστημα αναφοράς** στη φύση και επομένως **ούτε απόλυτη κίνηση**.

Η **κίνηση είναι σχετική**. Όταν λέμε ότι κάτι κινείται εννοούμε ότι η θέση του σχετικά με κάτι άλλο αλλάζει. Η κίνηση έχει σχέση μόνο σε σχέση με ένα ορισμένο σύστημα αναφοράς.

Transformation of Coordinates



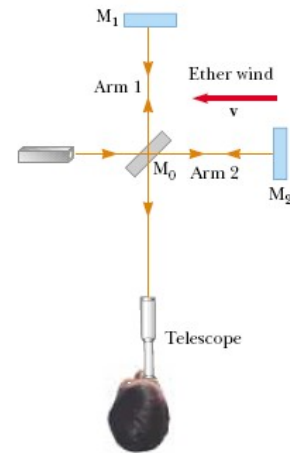
# Το πείραμα των Michelson-Morley, 1887

## Η απόρριψη του αιθέρα

Οι φυσικοί του 19ου αιώνα πίστευαν ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, άρα και το φως, χρειάζονταν ένα μέσο διάδοσης, **διαφανούς** κι άρα μη άμεσα παρατηρήσιμου. Το μέσον αυτό που υπήρχε παντού, ακόμη και στο κενό, το ονόμασαν **αιθέρα**.

Θεωρούσαν ότι τα κύματα φωτός αντιστοιχούσαν στις ταλαντώσεις του μέσου αυτού, που είχε περίεργες ιδιότητες. Δεν είχε μάζα αλλά ήταν άκαμπτο και δεν επιδρούσε στις τροχιές κανενός ουράνιου σώματος. Οι φυσικοί, επίσης, πίστευαν ότι οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού ίσχυαν για **ένα απόλυτο ή παγκόσμιο σύστημα αναφοράς**, όπως το έλεγαν, και το οποίο ήταν **ακίνητο ως προς τον αιθέρα**. Έτσι για να τους χρησιμοποιήσουν σε ένα άλλο σύστημα, που κινείται ως προς το απόλυτο σύστημα αναφοράς του αιθέρα, έπρεπε να τους τροποποιήσουν.

Η ύπαρξη αυτού του απόλυτου συστήματος αναφοράς ήταν μεγάλης σημασίας γιατί η **ταχύτητα του φωτός**, ως προς τη Γη, θα έπρεπε να αλλάζει ανάλογα με την κατεύθυνση που το παρατηρούμε. Έτσι λοιπόν αν η απόλυτη ταχύτητα του φωτός ως προς τον αιθέρα είναι  $c$  και  $v$  η ταχύτητα της Γης πάλι ως προς τον αιθέρα, τότε η παρατηρούμενη ταχύτητα του φωτός θα μπορούσε να ήταν  $c+v$ , για όμοιες κατευθύνσεις του φωτός και του αιθέρα ή  $c-v$  για αντίθετες κατευθύνσεις, **δηλαδή θα άλλαζε ανάλογα με την διεύθυνση της ταχύτητας**.



# Το πείραμα των Michelson-Morley

## Η απόρριψη του αιθέρα

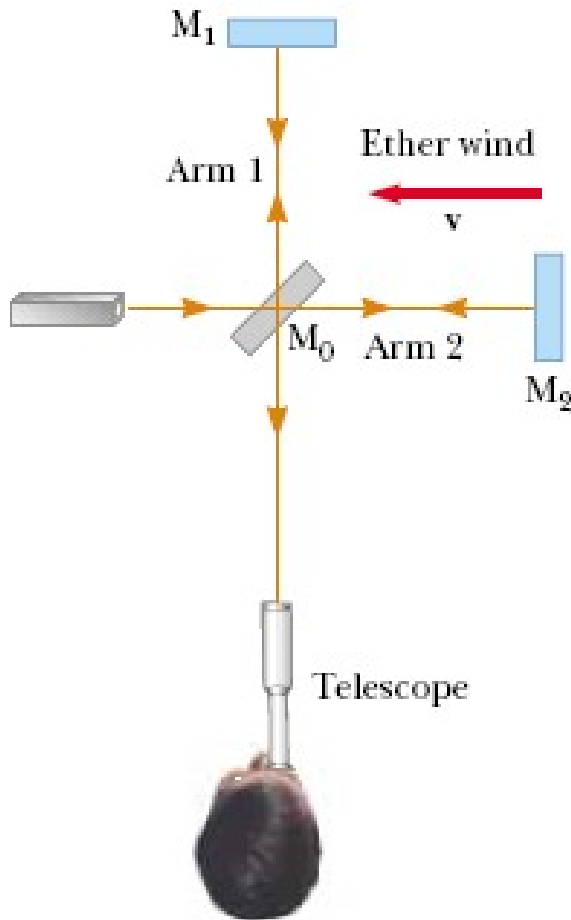
Ιστορικά

σημαντικό

Συνέβαλλε στην απόρριψη του 'Αιθέρα'

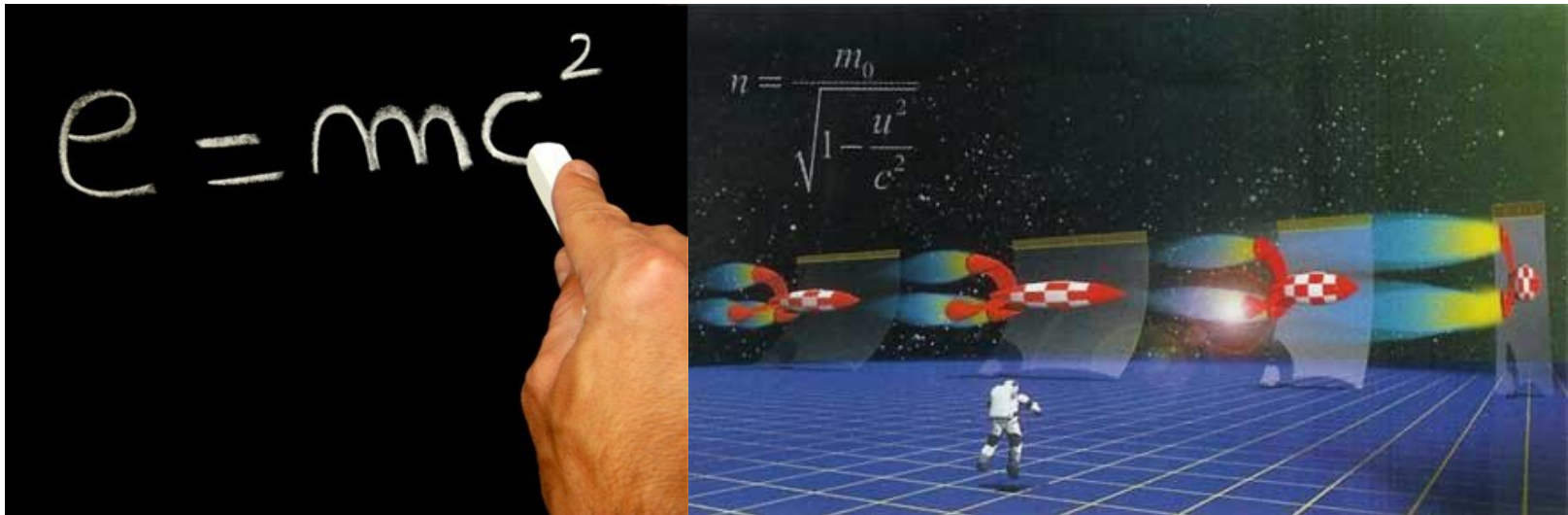
Εισήγαγε μια αποτελεσματική μέθοδο μέτρησης μηκών της τάξης του 1% του  $\lambda$

Είχε αρνητικό αποτέλεσμα



# Ειδική Θεωρία Σχετικότητας

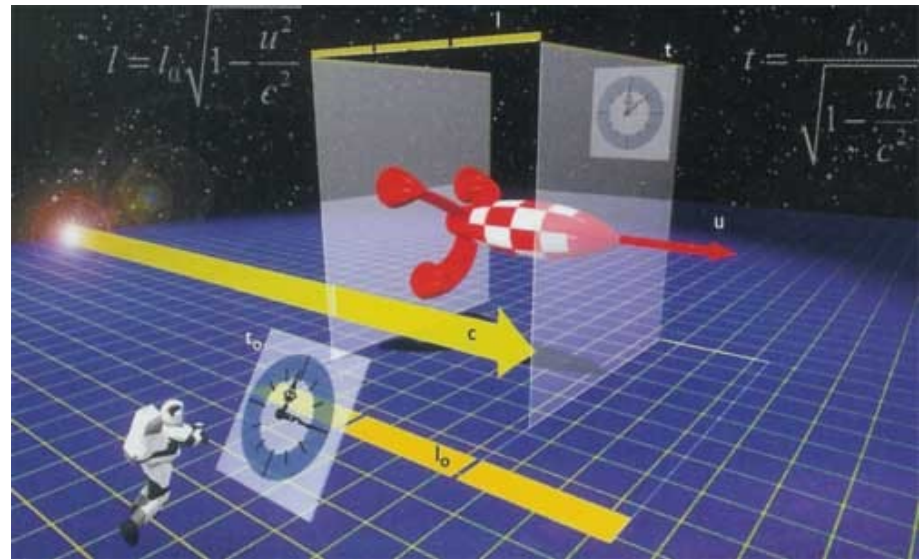
Η Θεωρία αυτή ονομάστηκε Ειδική Σχετικότητα, για να δείξει ότι ασχολείται με συστήματα αναφοράς που κινούνται το ένα σχετικά ως προς το άλλο (Σχετικότητα) αλλά δεν θα πρέπει να κινούνται κυκλικά ή με επιταχυνόμενη κίνηση (Ειδική Θεωρία, όχι Γενική).



# Η άμεση και εκπληκτική συνέπεια των δύο υποθέσεων

- Ο Αϊνστάιν έδειξε πως μια σειρά φυσικών ποσοτήτων που προηγουμένως θεωρούνταν αναλλοίωτες (χρόνος, μάζα, μήκος κλπ), είναι τελικά ποσότητες σχετικές για παρατηρητές με σχετική ταχύτητα ο ένας ως προς τον άλλο.

➤ Και από την άλλη, έδειξε πως **όλοι οι νόμοι** που κυβερνούν τα φαινόμενα παραμένουν **αναλλοίωτοι** σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.



# Σχετικότητα και Αναλλοίωτο

Δηλαδή η Ειδική Θεωρία ασχολείται με δύο ιδέες που μπορούν να θεωρηθούν αντίθετες, την **σχετικότητα** και το **αναλλοίωτο**.

- Η **σχετικότητα** έχει να κάνει με την έννοια της σχετικότητας της παρατήρησης ενός φαινομένου. Ένας παρατηρητής βλέπει ένα φαινόμενο διαφορετικά από έναν άλλο που κινείται σχετικά ως προς τον πρώτο. Διαφωνούν δηλαδή οι δύο τους σε ορισμένα μεγέθη που μετρούν.
- Το **αναλλοίωτο** από την άλλη, αναφέρεται στη συμφωνία που επικρατεί για ορισμένους νόμους ή φαινόμενα, που είναι όμοια και στους δύο.



# Η θεωρία έχει ορισμένες περίεργες συνέπειες

## Κάποιες από αυτές είναι οι εξής:

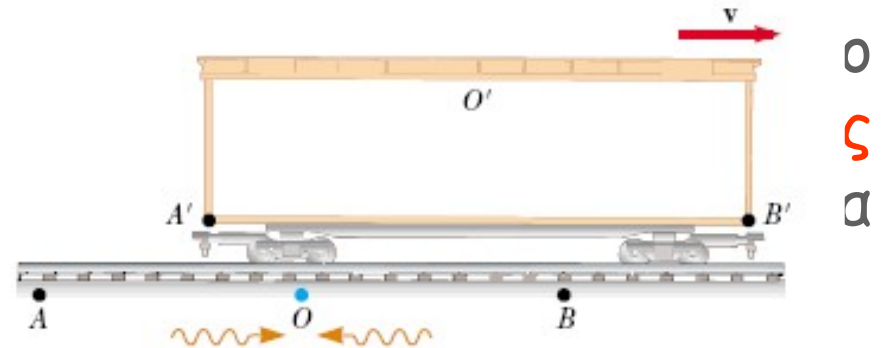
**Διαστολή του χρόνου:** Τα κινούμενα ρολόγια γυρνάνε πιο αργά από ένα στάσιμο ρολόι ενός παρατηρητή.

➤ **Συστολή του μήκους:** Τα αντικείμενα παρατηρούνται να μικραίνουν στην κατεύθυνση που κινούνται σε σχέση με τον παρατηρητή.

➤ **Σχετικότητα της ταυτοχρονικότητας:** Δύο γεγονότα που φαίνονται να συμβαίνουν ταυτόχρονα σε έναν παρατηρητή A, δε θα συμβαίνουν ταυτόχρονα για έναν παρατηρητή B, εάν ο B κινείται σε σχέση με τον A.

➤ **Ισοδυναμία μάζας-ενέργειας:** Από τη σχέση  $E = mc^2$ , η ενέργεια και η μάζα είναι ισοδύναμες.

# Η έννοια του ταυτόχρονου



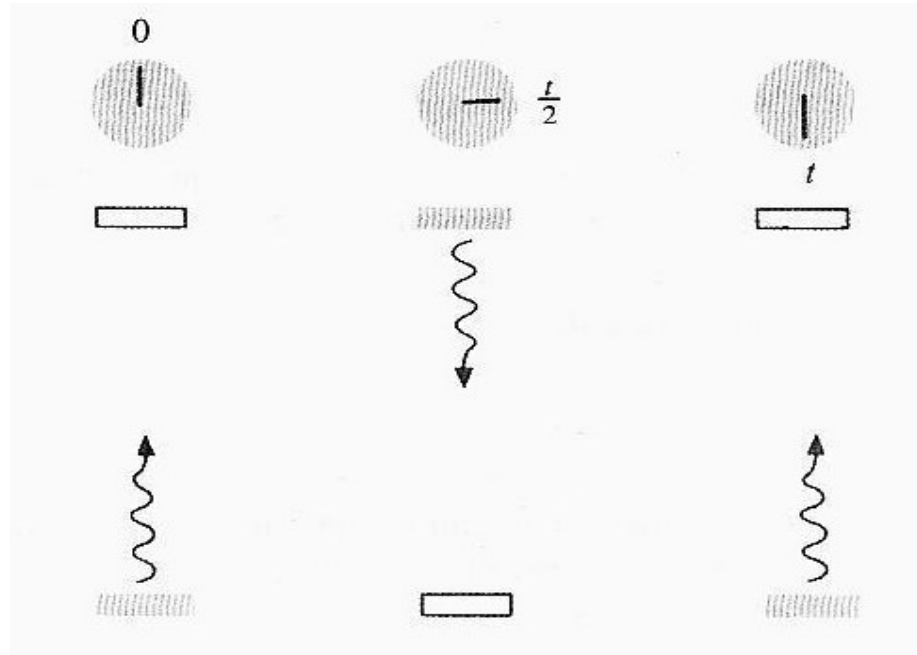
Δύο γεγονότα που είναι ταυτόχρονα σε ένα σύστημα αναφοράς δεν είναι κατ'ανάγκη ταυτόχρονα σε ένα άλλο σύστημα που κινείται ως προς το πρώτο.



# Διαστολή του χρόνου

Ένα ρολόι παλμών φωτός σε ηρεμία στο έδαφος όπως φαίνεται από παρατηρητή του εδάφους. Η πλάκα του ρολογιού αναπαριστά ένα συμβατικό ρολόι στο έδαφος.

Κάθε τικ-τακ αντιστοιχεί σε ένα ταξίδι με επιστροφή του παλμού φωτός από το χαμηλότερο καθρέφτη στον υψηλότερο και ξανά πίσω.

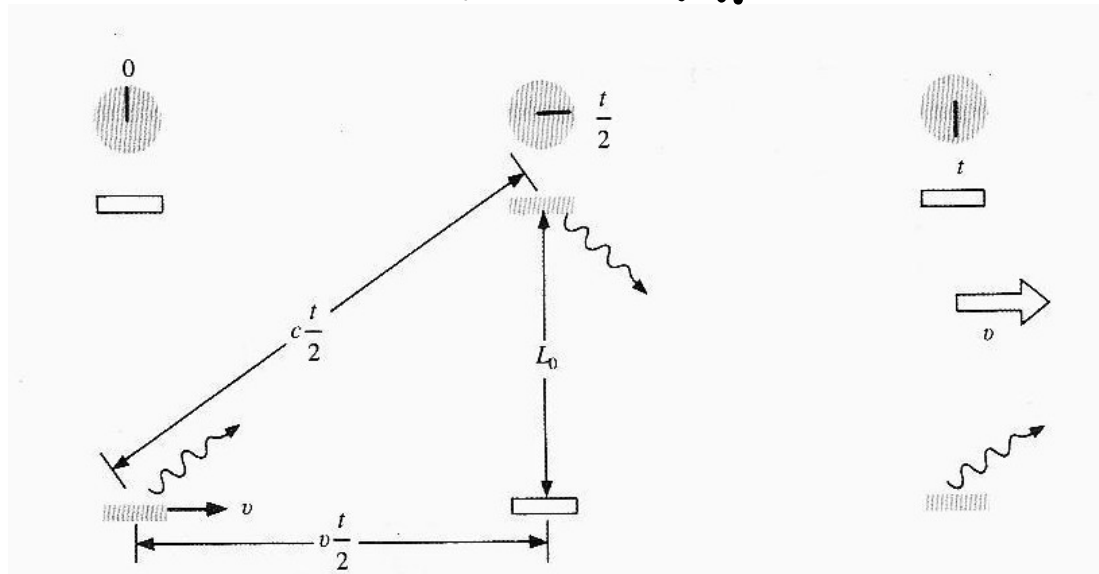


Ο χρόνος που απαιτείται ώστε ο παλμός φωτός να ταξιδέψει μεταξύ των καθρεφτών με ταχύτητα  $c$ , είναι  $t_0/2$ . άρα  $t_0/2 = L_0/c$ .

$$t_0 = \frac{2L_0}{c}$$

Η ποσότητα  $t_0$ , που προσδιορίζεται από γεγονότα που συμβαίνουν *στον ίδιο τόπο* με αυτόν του συστήματος αναφοράς του παρατηρητή ονομάζεται *ίδιος χρόνος*.

# Διαστολή του χρόνου



Ένα παλμικό ρολόι φωτός από ένα διαστημόπλοιο όπως φαίνεται από παρατηρητή του εδάφους. Οι καθρέπτες είναι παράλληλοι προς τη διεύθυνση κίνησης του διαστημοπλοίου..

Στο δρόμο από τον χαμηλότερο στον ψηλότερο καθρέφτη σε χρόνο  $t/2$ , ο παλμός διανύει μια οριζόντια απόσταση  $v(t/2)$  και μια ολική απόσταση  $c(t/2)$ .

$$\frac{t^2}{4} (c^2 - v^2) = L_0^2$$

$$t^2 = \frac{4L_0^2}{c^2 - v^2} = \frac{(2L_0)^2}{c^2(1 - v^2/c^2)}$$

$$t = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Διαστολή χρόνου

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

# Διαστολή του χρόνου

- Επειδή  $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$ , για ένα κινούμενο αντικείμενο, ο χρόνος  $t$  είναι πάντοτε μεγαλύτερος από το χρόνο  $t_0$ .

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow t = \gamma \cdot t_0$$

Όπου

$t_0$  = χρονικό διάστημα στο ρολόι σε ηρεμία σχετικά με τον παρατηρητή

$t$  = χρονικό διάστημα στο ρολόι σε κίνηση σχετικά με τον παρατηρητή

$v$  = ταχύτητα σχετικής κίνησης

$c$  = ταχύτητα του φωτός

Το γεγονός που εμφανίστηκε στο σύστημα αναφοράς του κινούμενου αντικειμένου μέσα σε χρόνο  $t_0$ , έγινε αντιληπτό από τον ακίνητο παρατηρητή να έχει συμβεί σε μεγαλύτερο χρόνο  $t$ .

Ο χρόνος  $t$  μπορεί να είναι κατά πολύ μεγαλύτερος από τον χρόνο  $t_0$  εάν η ταχύτητα  $v$  είναι κοντά στην ταχύτητα του φωτός  $c$

# Φαινόμενο Doppler

Η αύξηση του τόνου ενός ήχου όταν η πηγή του μας πλησιάζει (ή όταν εμείς πλησιάζουμε την πηγή) και την ελάττωση του τόνου όταν η πηγή απομακρύνεται (ή όταν εμείς απομακρυνόμαστε από την πηγή), δηλαδή η μεταβολή της συχνότητας αποτελούν το φαινόμενο Doppler.

**Φαινόμενο Doppler  
για τον ήχο**

$$v = v_0 \left( \frac{1 + v/c}{1 - V/c} \right)$$

όπου  $c$  = ταχύτητα του ήχου

$v$  = ταχύτητα παρατηρητή

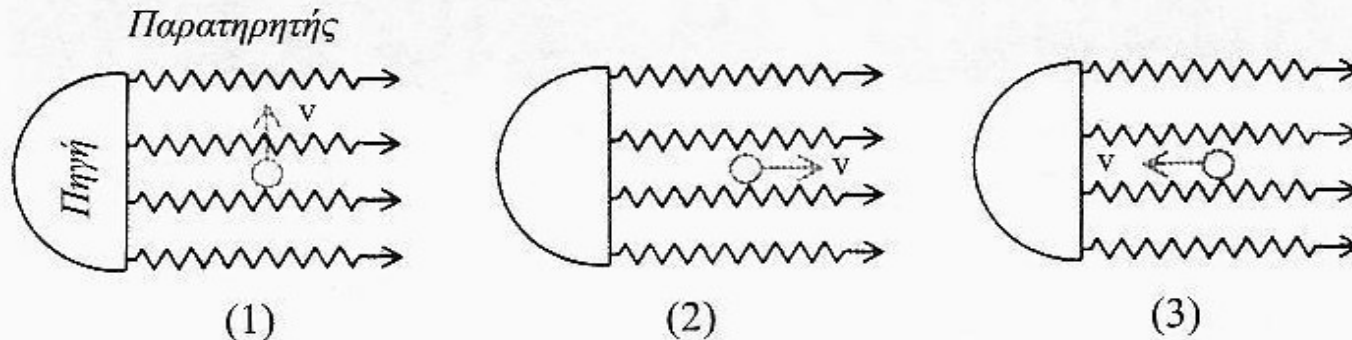
$V$  = ταχύτητα πηγής

Εάν ο παρατηρητής είναι ακίνητος  $v = 0$  και εάν η πηγή είναι ακίνητη  $V = 0$ .

Το φαινόμενο Doppler για το φως πρέπει να διαφέρει από αυτό για τον ήχο. Μόνο η σχετική κίνηση πηγής - παρατηρητή έχει σημασία.

Μπορούμε να μελετήσουμε το φαινόμενο Doppler για το φως θεωρώντας μία πηγή φωτός σαν ένα ρολόι το οποίο χτυπά  $v_0$  φορές ανά δευτερόλεπτο και εκπέμπει ένα κύμα φωτός με κάθε κτύπημα. Θα εξετάσουμε τις τρεις περιπτώσεις που φαίνονται στο Σχήμα 1.5.

**ΣΧΗΜΑ 1.5** Η συχνότητα του φωτός όπως φαίνεται από έναν παρατηρητή εξαρτάται από τη διεύθυνση και ταχύτητα της κίνησης του παρατηρητή σχετικά με την κίνηση της πηγής.



# Φαινόμενο Doppler

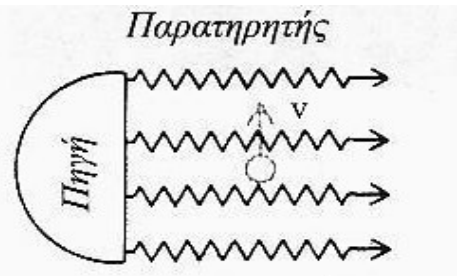
1. Ο παρατηρητής κινείται κάθετα στη γραμμή μεταξύ αυτού και της πηγής φωτός.  
Εγκάρσιο φαινόμενο Doppler Ο κανονικός χρόνος μεταξύ των τικ-τακ είναι  $t_0 = 1/\nu_0$ , έτσι ώστε, μεταξύ ενός τικ-τακ και του επομένου ο χρόνος που περνά στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή να είναι  $t = t_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Αντίστοιχα η συχνότητα θα είναι

$$\nu \text{ (εγκάρσιο)} = \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{t_0}$$

**Εγκάρσιο φαινόμενο  
Doppler για το φως**

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Η παρατηρούμενη συχνότητα  $\nu$  είναι πάντοτε μικρότερη από τη συχνότητα της πηγής  $\nu_0$ .



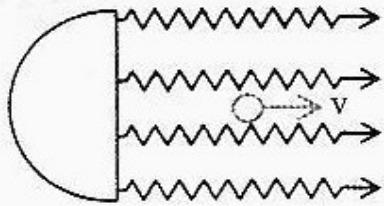
# Φαινόμενο Doppler

Ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή φωτός.

Ο παρατηρητής διανύει την απόσταση  $vt$  αποκρινόμενος από την πηγή, που σημαίνει ότι το κύμα φωτός χρειάζεται περισσότερο χρόνο κατά  $vt/c$  για να τον φθάσει.

Άρα ο συνολικός χρόνος μεταξύ της άφιξης διαδοχικών κυμάτων είναι:

$$T = t + \frac{vt}{c} = t_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t_0 \frac{\sqrt{1 + v/c} \sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 + v/c} \sqrt{1 - v/c}}$$
$$= t_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$



και η παρατηρούμενη συχνότητα είναι

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Όπου  $\nu$  μικρότερη από τη συχνότητα της πηγής  $\nu_0$ .

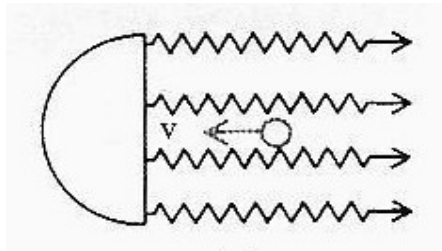


# Φαινόμενο Doppler

Ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή φωτός.

Ο παρατηρητής διανύει απόσταση  $ut$  προς την πηγή, που σημαίνει ότι το κάθε κύμα φωτός χρειάζεται λιγότερο χρόνο κατά  $ut/c$  για να τον φθάσει.

Άρα ο συνολικός χρόνος μεταξύ της άφιξης διαδοχικών κυμάτων είναι  $T=t-ut/c$  και η συχνότητα  $\nu$ :



$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

Όπου  $\nu$  μεγαλύτερη από τη συχνότητα της πηγής  $\nu_0$ .

# Φαινόμενο Doppler

1. Ο παρατηρητής κινείται κάθετα στη γραμμή μεταξύ αυτού και της πηγής φωτός.

Εγκάρσιο φαινόμενο Doppler

Ο κανονικός χρόνος μεταξύ των τικ-τακ είναι  $t_0 = 1/\nu_0$ , έτσι ώστε, μεταξύ ενός τικ-τακ και του

επομένου ο χρόνος που περνά στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή να είναι

$t = t_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Αντίστοιχα η συχνότητα θα είναι

$$\nu \text{ (εγκάρσιο)} = \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{t_0}$$

**Εγκάρσιο φαινόμενο  
Doppler για το φως**

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Η παρατηρούμενη συχνότητα  $\nu$  είναι πάντοτε μικρότερη από τη συχνότητα της πηγής  $\nu_0$ .

Οι εξισώσεις (1.6) και (1.7) μπορούν να  
συνδυαστούν στην απλή σχέση

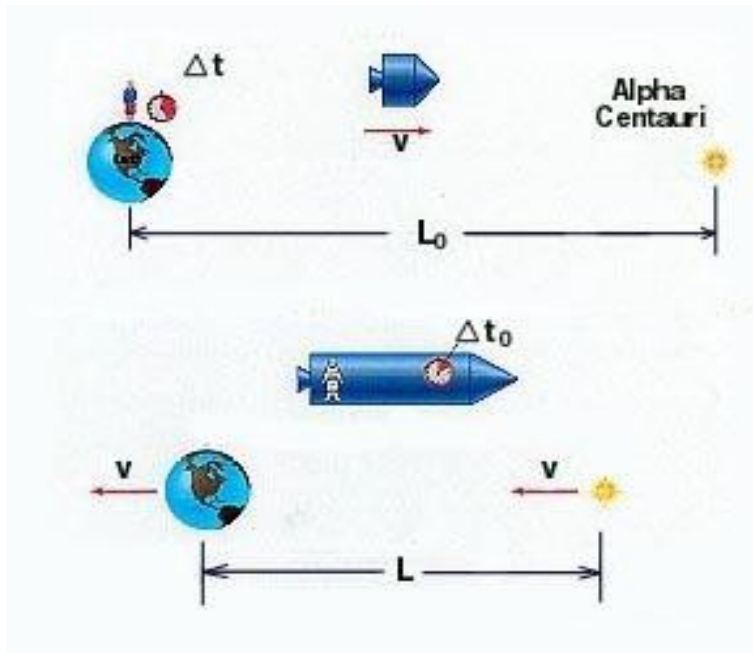
*Doppler*

**Επίμηκες φαινόμενο  
Doppler για το φως**

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (1.8)$$

υιοθετώντας τη συνθήκη ότι η ταχύτητα  $v$  έχει πρόσημο + για πηγή και παρατηρητή που πλησιάζουν ο ένας τον άλλο και - για πηγή και παρατηρητή που απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο.

# Διαστολή του χρόνου - Συστολή του μήκους

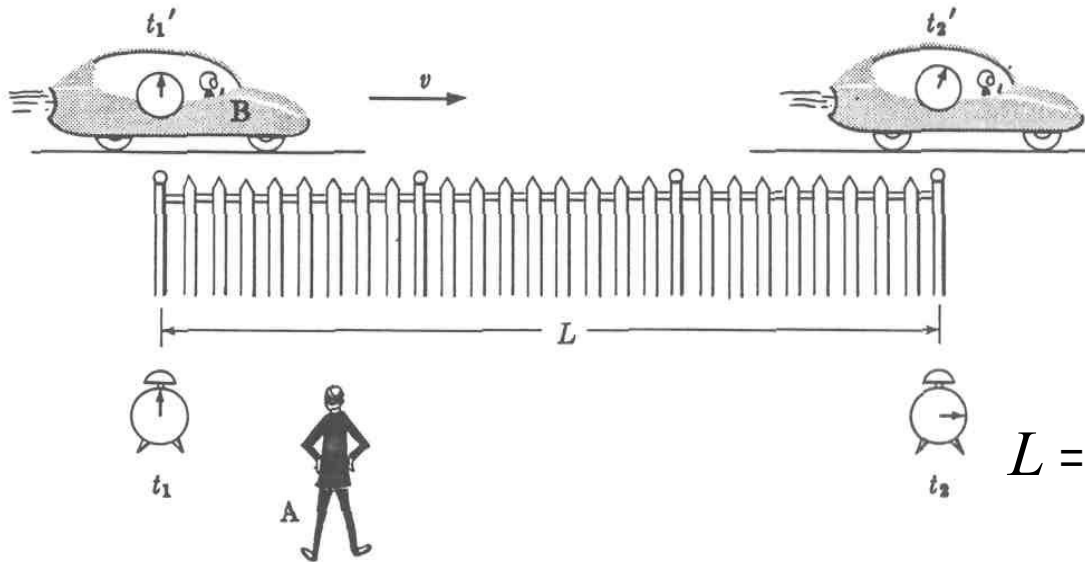


Ο παρατηρητής στη γη μετράει απόσταση  $L_0$ :  
Ο παρατηρητής στη Γη βρίσκεται σε ηρεμία σε σχέση με τη διεύθυνση Γη-αστέρα, επομένως μετράει το σωστό μήκος  $L_0$ .

Ο αστροναύτης μετράει  $t_0$ :  
Καθώς το ρολόι του αστροναύτη βρίσκεται κατά την έναρξη και κατά τη λήξη του γεγονότος - από την αναχώρησή του από τη γη έως την άφιξή του στον αστέρα, μετράει τη σωστή ώρα

# Συστολή του μήκους

Το **ιδιομήκος** ενός αντικειμένου ορίζεται ως το μήκος του αντικειμένου που μετριέται στο σύστημα αναφοράς στο οποίο το αντικείμενο **ηρεμεί**.



$$L = v \Delta t_p = v \frac{\Delta t}{\gamma}$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2} \rightarrow L = L_0 / \gamma$$

Το **μήκος** ενός αντικειμένου είναι πάντοτε **μικρότερο** από το **ιδιομήκος**, όταν μετριέται σε ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το αντικείμενο **κινείται**.

Η συστολή συμβαίνει μόνο κατά τη διεύθυνση της σχετικής κίνησης.

# Συστολή Lorentz - FitzGerald

Η συστολή συμβαίνει μόνο κατά τη διεύθυνση της σχετικής κίνησης. Τα μίονια παράγονται σε μεγάλα ύψη από ταχέα σωματία της κοσμικής ακτινοβολίας, κυρίως πρωτόνια, κατά τη διάρκεια συγκρούσεων με πυρήνες ατόμων της ατμόσφαιρας της Γης.

Τα μίονια ταξιδεύουν με ταχύτητες λίγο μικρότερες της ταχύτητας του φωτός,  $v=0.998c$ . Περίπου 1 μίονιο περνάει διαμέσου  $1\text{cm}^2$  της επιφάνειας της Γης ανά min.

Παρατηρητής σε ηρεμία σε σχέση με τα μίονια (δηλ. κινείται μαζί με τα μίονια) μετράει το μέσο χρόνο ζωής ίσο με  $2\ \mu\text{s}$ ; Αυτό είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ της δημιουργίας τους στην ανώτερη ατμόσφαιρα και της διάσπασής τους.

$$t_0 = 2\ \mu\text{s} \rightarrow$$

$$ut_0 = (2.994 \times 10^8\ \text{m/s})(2 \times 10^{-6}\ \text{s}) = 600\ \text{m}$$

$$t = t_0 / (1 - u^2/c^2)^{1/2}$$

$$u / c = 0.998$$

$$[1 - (0.998)^2]^{1/2} = 0.063$$

$$t = t_0 / 0.063$$

$$= 2.2\ \mu\text{s} / 0.063$$

$$= 31.6 \times 10^{-6}\ \text{s}$$

Ο ακίνητος παρατηρητής στη Γη εκτιμάει τον μέσο χρόνο ζωής των μιονίων ίσο με  $31.6\ \mu\text{s}$

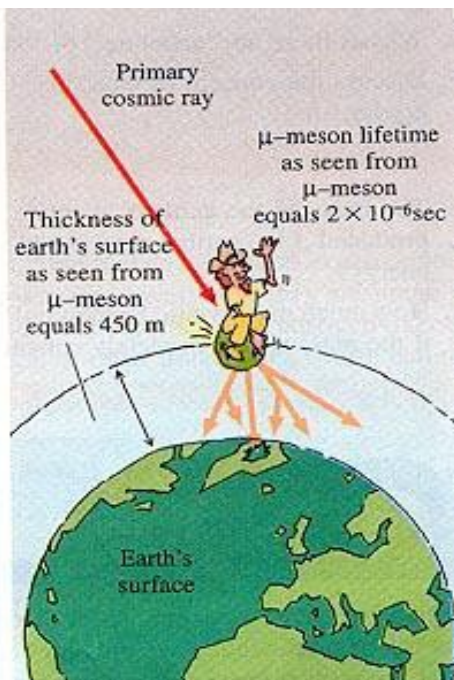
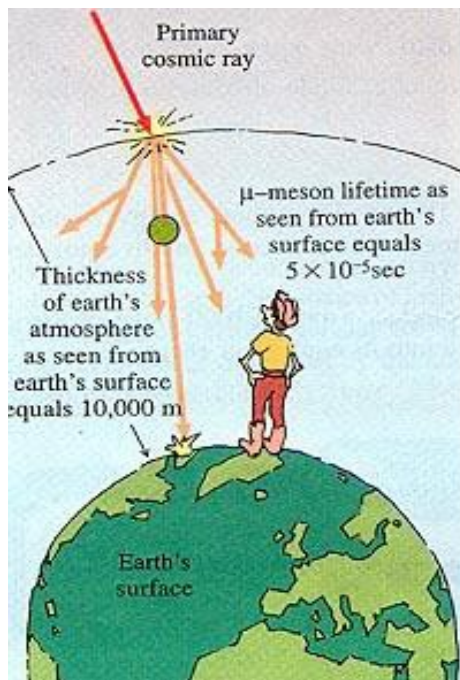
$$t = 31.6\ \mu\text{s} \rightarrow$$

$$L_0 = ut = (2.994 \times 10^8\ \text{m/s})(31.6 \times 10^{-6}\ \text{s}) \\ = 9500\ \text{m}$$

$$= 4.8 \times 10^3\ \text{m}$$

# Διαστολή του χρόνου-Συστολή του μήκους

Κανονικό μήκος είναι η απόσταση μεταξύ σημείων σχετικά με έναν παρατηρητή στο ίδιο σύστημα αναφοράς.



Το γεγονός ξεκινάει με τη γέννηση του μιονίου και τελειώνει με τη διάσπασή του

Το μίονιο κινείται σε σχέση με τον παρατηρητή στη γη και επομένως ο παρατηρητής μετράει τον καθυστερημένο (δισταλμένο) χρόνο

$$t = 31,6 \times 10^{-6} \text{ s.}$$

Ο ίδιος παρατηρητής μετράει το «κανονικό» μήκος (μεγαλύτερο)  $L_0$

Ένας παρατηρητής που ταξιδεύει μαζί με το μίονιο μετράει τον «κανονικό» (μικρότερο) χρόνο  $t_0 = 2 \times 10^{-6}$  s, αλλά και το συμβατικό (μικρότερο) διάστημα  $L$ .

### Άσκηση

Διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα  $0.9c$ . Αν το μήκος του είναι  $L_0$  όταν μετρηθεί μέσα από το διαστημόπλοιο, ποιο είναι το μήκος του όταν μετρηθεί από παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος.

### Απάντηση

Από τον τύπο της συστολής του μήκους:

$$L = L_0 / \gamma \Rightarrow L = L_0 \cdot \sqrt{(1 - 0.9^2)} \Rightarrow L = 0.436 \cdot L_0$$

# Συνέπειες της Διαστολή του χρόνου

## Το παράδοξο των διδύμων



Το άτομο στη γη παρέμεινε σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς

Ο ταξιδιώτης στο διάστημα έχει επιταχυνθεί, και ως εκ τούτου δεν ήταν σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας ισχύει για το πρόσωπο στη γη, αλλά όχι για τον ταξιδιώτη στο διάστημα γιατί ήταν σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς



# Ηλεκτρισμός-Μαγνητισμός

## η γέφυρα είναι η σχετικότητα

Οι μαγνητικές δυνάμεις είναι τροποποιήσεις των ηλεκτρικών δυνάμεων που προέρχονται από σχετική κίνηση μεταξύ φορτίων.

### **Το ηλεκτρικό φορτίο είναι σχετικιστικά αμετάβλητο**

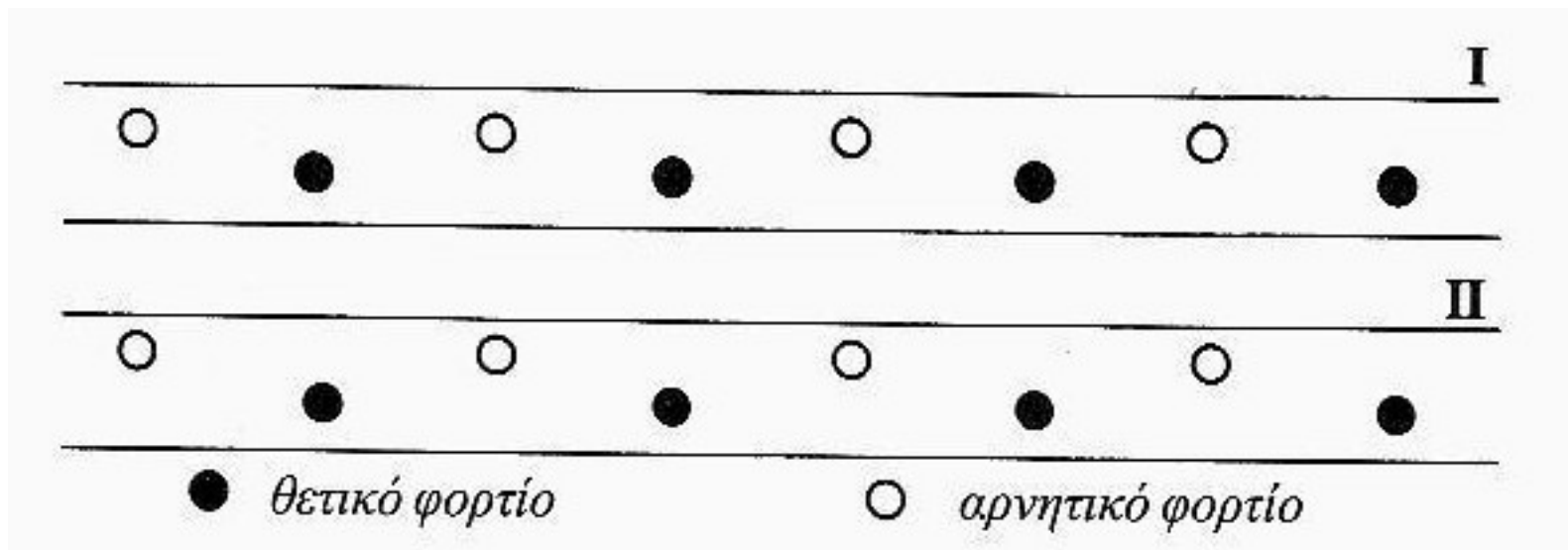
Ένα φορτίο του οποίου το μέγεθος είναι  $Q$  σε ένα σύστημα αναφοράς, θα είναι επίσης  $Q$  σε όλα τα άλλα συστήματα αναφοράς.

# Ηλεκτρισμός-Μαγνητισμός

η γέφυρα είναι η σχετικότητα

Έστω δύο ιδεατοί αγωγοί που περιέχουν ευρισκόμενοι σε ηρεμία ίσο αριθμό θετικών και αρνητικών φορτίων τοποθετημένων σε ίσες αποστάσεις.

Επειδή οι αγωγοί είναι ηλεκτρικά ουδέτεροι δεν υπάρχει καμία δύναμη μεταξύ τους.



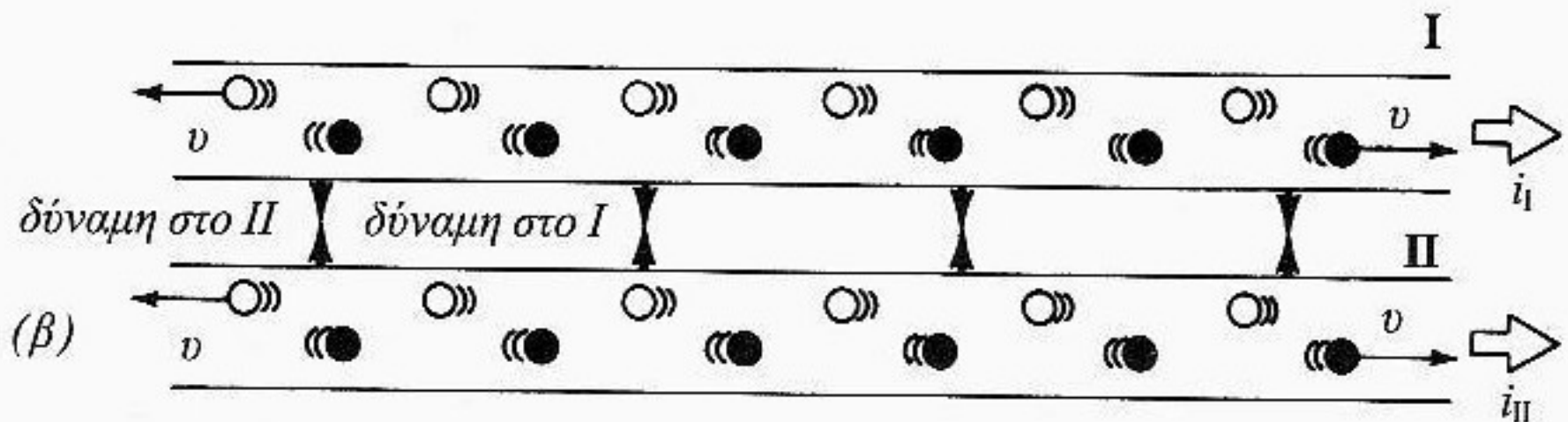
# Ηλεκτρισμός-Μαγνητισμός

Έστω ότι οι ίδιοι αγωγοί μεταφέρουν τα ρεύματα  $i_I$  και  $i_{II}$  στην ίδια διεύθυνση.

Τα θετικά φορτία κινούνται προς τα δεξιά και τα αρνητικά προς τα αριστερά με την ίδια ταχύτητα  $v$  (τα πραγματικά ρεύματα στα μέταλλα δημιουργούνται μόνο από ροή αρνητικών φορτίων).

Επειδή τα φορτία κινούνται, οι αποστάσεις τους είναι μικρότερες κατά έναν παράγοντα  $(1-v^2/c^2)^{1/2}$  από όταν είναι ακίνητα. Επειδή η ταχύτητα  $v$  είναι η ίδια και για τις δυο ομάδες φορτίων, οι αποστάσεις τους συστέλλονται κατά το ίδιο ποσοστό και οι αγωγοί παραμένουν ουδέτεροι για το παρατηρητή.

Εντούτοις οι αγωγοί έλκουν ο ένας τον άλλον. Γιατί;

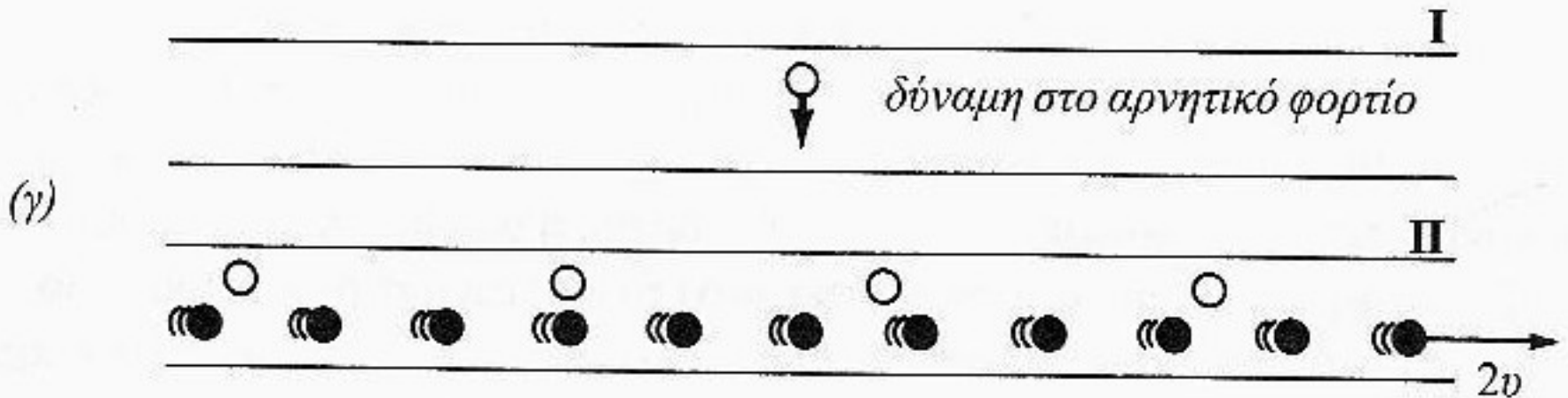


# Ηλεκτρισμός-Μαγνητισμός

Έστω ότι παρακολουθούμε τον αγωγό II από το σύστημα αναφοράς ενός αρνητικού φορτίου του αγωγού I.

Επειδή τα αρνητικά φορτία στον αγωγό II εμφανίζονται να είναι σε ηρεμία σε αυτό το σύστημα αναφοράς, οι αποστάσεις τους δεν υφίστανται συστολή. Όμως τα θετικά φορτία στον II έχουν την ταχύτητα  $2u$  και οι αποστάσεις τους αντίστοιχα έχουν υποστεί μεγαλύτερη συστολή από ο,τι εμφανίζεται στο σύστημα εργαστηρίου.

Ο αγωγός II εμφανίζεται να έχει καθαρό θετικό φορτίο και μια ελκτική δύναμη δρα στα αρνητικά φορτία στον αγωγό I.

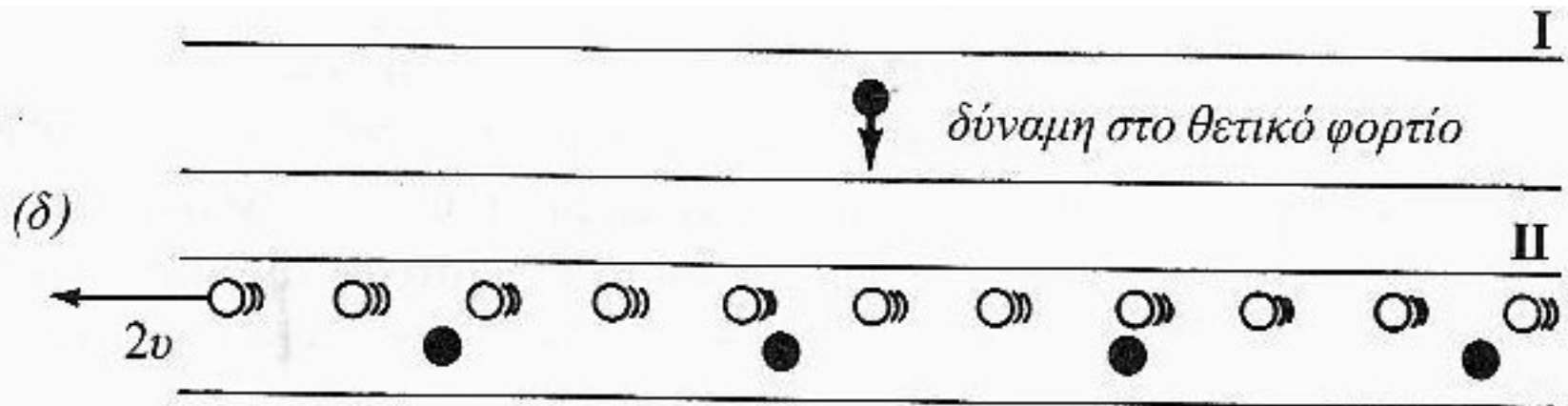


# Ηλεκτρισμός-Μαγνητισμός

Έστω ότι παρακολουθούμε τον αγωγό II από το σύστημα αναφοράς ενός θετικού φορτίου του αγωγού I.

Επειδή τα θετικά φορτία στον αγωγό II εμφανίζονται να είναι σε ηρεμία σε αυτό το σύστημα αναφοράς, οι αποστάσεις τους δεν υφίστανται συστολή. Όμως τα αρνητικά φορτία στον II έχουν την ταχύτητα  $2v$  και οι αποστάσεις τους αντίστοιχα είναι πλησιέστερες από ότι των θετικών..

Ο αγωγός II εμφανίζεται αρνητικά φορτισμένος και μια ελκτική δύναμη δρα στα θετικά φορτία του αγωγού I.



# Σχετικιστική μάζα

Σχετικιστική  
μάζα

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Η μάζα ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα  $v$  σχετικά με έναν παρατηρητή είναι μεγαλύτερη από τη μάζα ηρεμίας κατά ένα ποσοστό  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Ένα διαστημόπλοιο όταν πετάει είναι μικρότερο σε μήκος από το δίδυμό του που βρίσκεται στο έδαφος, ενώ η μάζα του είναι μεγαλύτερη.

Για κάποιον που βρίσκεται στο διαστημόπλοιο σε πτήση, το δίδυμο διαστημόπλοιο στο έδαφος εμφανίζεται επίσης να είναι μικρότερο και να έχει μεγαλύτερη μάζα.

# Σχετικιστική μάζα

Σχετικιστική  
μάζα

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Η μάζα ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα  $v$  σχετικά με έναν παρατηρητή είναι μεγαλύτερη από τη μάζα ηρεμίας κατά ένα ποσοστό  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Όταν η ταχύτητα  $v$  πλησιάζει την τιμή  $c$ , η παράσταση  
πλησιάζει το μηδέν και η μάζα  $m$  πλησιάζει το άπειρο.

$$\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα  $v$  ποτέ δεν μπορεί να εξισωθεί με το  $c$ :  
κανένα σωμάτιο με μάζα δεν μπορεί να ταξιδέψει τόσο γρήγορα όσο το φως.

Για  $v=0.1c$ , η αύξηση της μάζας φτάνει μόνο το 0.5%

Για  $v=0.9c$ , η αύξηση της μάζας είναι πάνω από 100%.

# Σχετικιστική Ορμή

Ο ορισμός της σχετικιστικής ορμής πρέπει να ικανοποιεί τους ακόλουθους όρους :

- Η σχετικιστική ορμή πρέπει να διατηρείται σε όλες τις κρούσεις
- Η σχετικιστική ορμή πρέπει να τείνει προς τον κλασικό ορισμό για ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Όπου  $\gamma m_0$  είναι η σχετικιστική μάζα



# Σχετικιστική μάζα

## Άσκηση

Προσδιορίστε τη μάζα ενός ηλεκτρονίου ( $m_0 = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ) του οποίου η ταχύτητα είναι  $0.99 c$ .

## Λύση

Εδώ  $v/c = 0.99$  και  $v^2/c^2 = 0.98$  έτσι

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}}{\sqrt{1 - 0.98}} = 64 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

που είναι επτά φορές μεγαλύτερη από τη μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου.

# Μάζα και Ενέργεια, $E=mc^2$

Η κινητική ενέργεια,  $K$ , που απαιτείται για να φέρουμε ένα αντικείμενο από την ηρεμία σε ταχύτητα  $v$

$$K = \int_0^s F \, ds$$

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

$$\begin{aligned} K &= \int_0^s \frac{d(mv)}{dt} \, ds = \int_0^{mv} v d(mv) \\ &= \int_0^v v d \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη ( $\int x \, dy = xy - \int y \, dx$ ).

$$K = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 \int_0^v \frac{v \, dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \left[ m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} \right] \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2 \\ &= mc^2 - m_0 c^2 \end{aligned}$$

Η εξίσωση (1.19) μπορεί να γραφτεί

**Ολική  
ενέργεια**

$$mc^2 = m_0 c^2 + K$$

# Μάζα και Ενέργεια, $E=mc^2$

Η εξίσωση (1.19) μπορεί να γραφτεί

**Ολική  
ενέργεια**

$$mc^2 = m_0c^2 + K$$

**Ενέργεια ηρεμίας**

$$E_0 = m_0c^2$$

Εφόσον το σώμα κινείται, η ολική του ενέργεια είναι

**Ολική ενέργεια**

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

# Μάζα και Ενέργεια, $E=mc^2$

## Άσκηση

Ένα σώμα σε ηρεμία σπάει σε δύο κομμάτια με μάζα ηρεμίας 1 kg το καθένα, τα οποία απομακρύνονται το ένα από το άλλο με ταχύτητα  $0.6c$ . Υπολογίστε τη μάζα ηρεμίας του αρχικού συστήματος.

## Λύση

Επειδή η ολική ενέργεια του αρχικού σώματος θα πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα των ολικών ενεργειών των θραυσμάτων

$$m_0 c^2 = \frac{m_{01} c^2}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}} + \frac{m_{02} c^2}{\sqrt{1 - v_2^2 / c^2}}$$

$$m_0 = \frac{(2) (1\text{kg})}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 2.5 \text{ kg}$$

## Ισοδυναμία μάζας ενέργειας

Επειδή η μάζα και η ενέργεια δεν είναι ανεξάρτητες ποσότητες, οι αρχές διατήρησης για την καθμία καταλήγει ουσιαστικά σε μια αρχή - την αρχή διατήρησης μάζας - ενέργειας. Η μάζα μπορεί να δημιουργείται ή να καταστρέφεται, αλλά όταν αυτό συμβαίνει, ένα ισοδύναμο ποσό ενέργειας εξαφανίζεται ή παρουσιάζεται ταυτόχρονα. Η μάζα και η ενέργεια είναι διαφορετικές ποσότητες του ίδιου πράγματος.

Η απελευθέρωση τεράστιων ποσοτήτων ενέργειας κατά τις διεργασίες πυρηνικής σχάσης και σύντηξης αποτελεί εκδήλωση της ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας.

Η μετατροπή της μάζας σε ενέργεια είναι η βάση κατασκευής της ατομικής βόμβας.

Σε όλες τις αντιδράσεις που ελευθερώνεται ενέργεια, αυτό γίνεται εις βάρος της μάζας (συμπεριλαμβανομένων και των χημικών αντιδράσεων).

### Άσκηση

Έτσι ένα μολύβι μάζας 10 gr περιέχει την ισοδύναμη ποσότητα ενέργειας:

$$E = m \cdot c^2 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ kgr} * 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2 = 9 \cdot 10^{14} \text{ J}$$

# $K=1/2m_0u^2$ , προσέγγιση σε μικρές $u$

Όταν  $u \ll c$ , τότε  $K=1/2m_0u^2$ .

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2$$

Επειδή  $v^2/c^2 \ll 1$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διωνυμική προσέγγιση  $(1+x)^n \approx 1+nx$ , που ισχύει για  $|x| \ll 1$ , ώστε να επιτύχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

$$K \approx \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right] m_0c^2 - m_0c^2$$

$$K=1/2 m_0u^2, u \ll c$$

# $K=1/2mv^2$ , προσέγγιση σε μικρές $u$

Αν για την κινητική ενέργεια πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σχέσεις **κλασικής** ή **σχετικιστικής** μηχανικής εξαρτάται από το βαθμός ακρίβειας που απαιτεί το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Όταν  $u=10^7$  m/s (0.033c), τότε  $K=1/2mv^2$  υποτιμά την πραγματική κινητική ενέργεια μόνο κατά 0.08%.

Όταν  $u=3 \cdot 10^7$  m/s (0.1c), τότε  $K=1/2mv^2$  υποτιμά την πραγματική κινητική ενέργεια κατά 0.8%.

Όταν  $u=1.5 \cdot 10^8$  m/s (0.5c), τότε  $K=1/2mv^2$  υποτιμά την πραγματική κινητική ενέργεια κατά 19%.

Όταν  $u=0,99c$ , τότε  $K=1/2mv^2$  υποτιμά την πραγματική κινητική ενέργεια κατά 4300%.

Τα κλασσικά και σχετικιστικά αποτελέσματα μπορούν να θεωρηθούν περίπου ίσα (με διαφορές μικρότερες του 1%), όταν η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι μικρότερη των 10 keV:

**Κλασσικά:**

$$K = 10 \text{ keV} \Rightarrow \gamma = \frac{521}{511} \Rightarrow \gamma = 1.02 \Rightarrow u = 0.195c$$

**Σχετικιστικά:**

$$10 \text{ keV} = \frac{1}{2} m_0 u^2 = \frac{1}{2} m_0 c^2 \left( \frac{u}{c} \right)^2 \Rightarrow \left( \frac{u}{c} \right)^2 = 0.03914 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = 0.198c$$



## ΟΛΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ, ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΟΡΜΗ

Στην κλασική μηχανική, ένα σωματίο πρέπει να έχει μάζα ηρεμίας για να έχει ενέργεια και ορμή, αλλά στην σχετικιστική μηχανική η απαίτηση αυτή δεν ισχύει.

**Ολική  
ενέργεια**

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

**Σχετικιστική  
ορμή**

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Εάν  $m_0=0$  και  $v < c$ , είναι φανερό ότι  $E=p=0$ .

Ένα σωματίο χωρίς μάζα με ταχύτητα μικρότερη από αυτή του φωτός δεν μπορεί να έχει ούτε ενέργεια ούτε ορμή.

Εντούτοις, όταν  $m_0=0$  και  $v=c$  παίρνουμε τις απροσδιόριστες ποσότητες  $E=0/0$  και  $p=0/0$ . Δηλαδή η ενέργεια και η ορμή μπορούν να έχουν οποιαδήποτε τιμή.

Άρα και οι παραπάνω εξισώσεις είναι συνεπείς με την ύπαρξη σωματίων χωρίς μάζα που έχουν ενέργεια και ορμή εφόσον κινούνται με την ταχύτητα του φωτός.

# ΟΛΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ, ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΟΡΜΗ

Γιατί ισχύει  $E=pc$  για σωματΙΑ χωρίς μάζα

Ολική  
ενέργεια

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Σχετικιστική  
ορμή

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2}$$

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2}$$

$$p^2 c^2 = \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - v^2/c^2}$$

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 c^2 &= \frac{m_0^2 c^4 - m_0^2 v^2 c^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0^2 c^4 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} \\ &= m_0^2 c^4 \end{aligned}$$

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

# ΣΩΜΑΤΙΑ ΧΩΡΙΣ ΜΑΖΑ

Γιατί ισχύει  $E=pc$  για σωματρία χωρίς μάζα

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

**Άν υπάρχει ένα σωματριο με μάζα  $m=0$ , τότε  $E=pc$**

Όλα τα παραπάνω δεν σημαίνουν ότι υπάρχουν σωματρία χωρίς μάζα, άλλα ότι οι νόμοι της Μηχανικής δεν αποκλείουν την ύπαρξή τους, εφόσον  $v=c$  και  $E=pc$ .

Σωματρία χωρίς μάζα έχουν ανακαλυφθεί, τα οποία παρουσιάζουν την αναμενόμενη συμπεριφορά όπως το φωτόνιο.

# ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Τα δυο θεμελιώδη αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας είναι:

- Οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι για όλους τους παρατηρητές που βρίσκονται σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς
- Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι ίδια για όλους τους παρατηρητές, ανεξαρτήτως της σχετικής τους κίνησης ή της κίνησης της πηγής του φωτός.

Για να χρησιμοποιηθούν τα παραπάνω αξιώματα αντικαθιστούμε τους μετασχηματισμούς τους Γαλιλαίου με τους μετασχηματισμούς Lorentz.

# ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ:

- Τα κινούμενα ρολόγια πηγαίνουν αργότερα κατά έναν συντελεστή  $\gamma$  σε σύγκριση με το ρολόι ενός ακίνητου παρατηρητή. Το φαινόμενο αυτό λέγεται **διαστολή του χρόνου**.
- Το μήκος των αντικειμένων που κινούνται φαίνεται ότι είναι μικρότερο κατά την διεύθυνση της κίνησης. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συστολή του μήκους**.
- Γεγονότα που είναι ταυτόχρονα για έναν παρατηρητή δεν είναι ταυτόχρονα για έναν άλλο παρατηρητή που κινείται.

## Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \gamma mu$$

## ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΜΑΖΑΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$K = \gamma mc^2 - mc^2$$

## ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΟΡΜΗ ΣΥΝΔΕΕΤΑΙ ΜΕ ΤΗΝ ΟΛΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ $E^2 = p^2 c^2 + (mc)^2$

# Μετασχηματισμοί Lorentz

Οι μετασχηματισμοί από το  $S$  στο  $S'$

Οι μετασχηματισμοί  
συντεταγμένων

$$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Οι μετασχηματισμοί  
ταχυτήτων

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

Οι μετασχηματισμοί από το  $S'$  στο  $S$

Οι μετασχηματισμοί  
συντεταγμένων

Οι μετασχηματισμοί  
ταχυτήτων

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

Γενικότερα θέτουμε  $-u$  όπου  $u$   
και αντιμεταθέτουμε τα  $u_x$   
και  $u_y$