Μοντέλα Ανάλυσης της Πολυπλοκότητας στη Φυσική

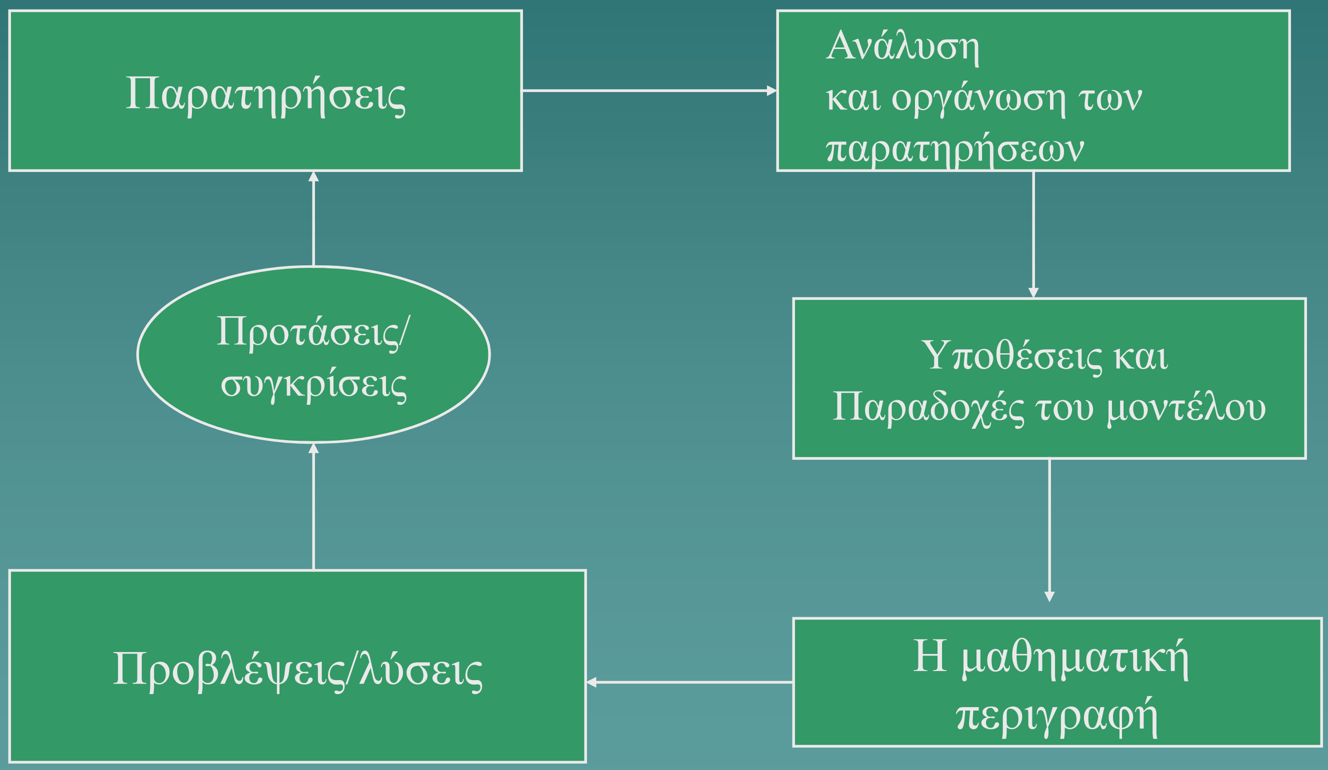
Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής
ΑΠΘ

Ο ρόλος του δασκάλου

Θέματα

- Μοντέλα της φύσης
- Γιατί δεν χρησιμοποιούμε τα παλιά μοντέλα για να αναλύσουμε τα πολύπλοκα φυσικά συστήματα?
- Το αυτόματο και το κυψελιδικό αυτόματο
- Το Lattice gas και η υδροδυναμική
- Αυτό-οργανούμενη κρισιμότητα και εφαρμογές στη φύση
- Percolation
- Επίλογος

Μοντέλα της φύσης και η επιστημονική μέθοδος



Πολύπλοκα Συστήματα

- Πώς θα ορίσω ένα πολύπλοκο σύστημα?
- Πώς θα μελετήσω ένα πολύπλοκο σύστημα?
- Τι είναι τα κυψελιδικά αυτόματα?
- Πώς θα τα χρησιμοποιήσω για να μελετήσω πολύπλοκα συστήματα?

Πολύπλοκα Συστήματα

- **Πολύπλοκο Σύστημα**= Ένα δυναμικό σύστημα που αποτελείται από έναν μεγάλο αριθμό **διαφορετικών μη-γραμμικά** αλληλεπιδρώντων στοιχείων
- Main Entry: **1com·plex**
  Function: *noun*
  Etymology: Late Latin *complexus* totality, from Latin, embrace, from *complecti*
  Date: 1643
  1 : a whole made up of complicated or interrelated parts

Παραδείγματα Πολύπλοκων Συστημάτων

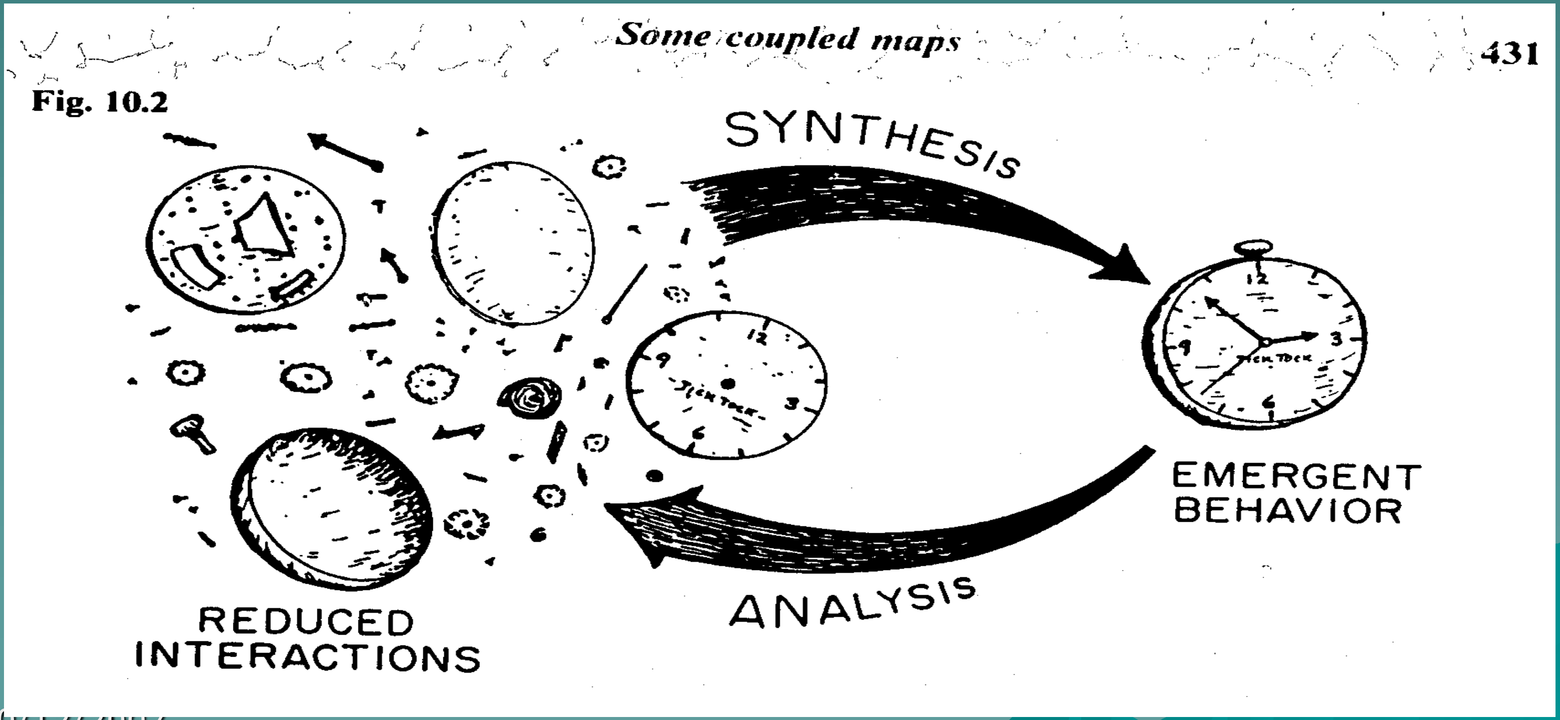
- Ο ανθρώπινος εγκέφαλος αποτελείται από 10 τρισεκατομμύρια νευρώνες
- Βιολογικά συστήματα
- Η τυρβώδης ροή
- Οι Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές: αποτελούνται από δεκάδες ηλεκτρονικά συστήματα
- Οι οπαδοί του Ολυμπιακού

Πως θα μελετήσω ένα Πολύπλοκο Σύστημα?

- Διαλέγουμε να απλοποιήσουμε κάποιες από τις συνιστώσες του συστήματος του οποίου τη συνολική συμπεριφορά θέλουμε να παρακολουθήσουμε
- Παρακολουθούμε τη δυναμική εξέλιξη ολόκληρου του συστήματος, όταν γνωρίζουμε την τοπική συμπεριφορά του

Πολύπλοκα συστήματα

- Δυναμική απλών συστημάτων
- Πολυπλοκότητα



Πολύπλοκα συστήματα

- Η σχετική απλοποίηση της τοπικής περιγραφής και η έμφαση στη συμπεριφορά ολόκληρου του συστήματος μας επιτρέπει να εξάγουμε αυστηρά αποτελέσματα με ακριβείς μεθόδους
- Η συμπεριφορά του συστήματος, παρόλο που είναι σύνθεση απλών μερών, είναι εξαιρετικά πολύπλοκη

Πως θα μελετήσουμε τα Πολύπλοκα Συστήματα?

- Ο Νεύτωνας έκανε κάτι μοναδικό στην Ιστορία των Επιστημών. Δημιούργησε το μαθηματικό εργαλείο που χρειαζόταν για να λύσει το φυσικό πρόβλημα που τον απασχολούσε.
- Εισήγαγε τον Διαφορικό λογισμό....

Πως θα μελετήσω τα Πολύπλοκα Συστήματα?

- Πιστεύω ότι οι διαφορικές εξισώσεις δεν αποτελούν το σωστό εργαλείο για την μελέτη των πολύπλοκων συστημάτων
- Είναι ιδανικές για μια κατηγορία προβλημάτων και ιδιαίτερα για τη μελέτη απλών συστημάτων και τοπικών λύσεων σε ένα Πολύπλοκο Σύστημα.
- Local vs. Global

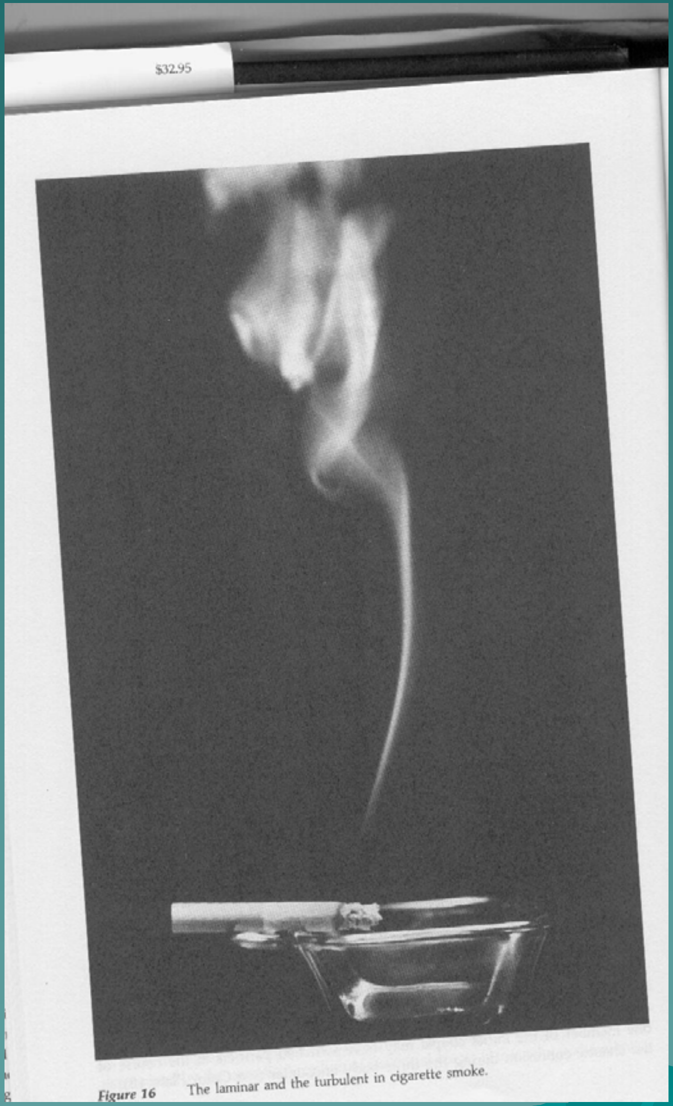
Η φυσική απέναντι στην πολυπλοκότητα

- Μια ιστορική δήλωση του Einstein
- "Το καθήκον του φυσικού είναι να φτάσει σε εκείνους τους παγκόσμιους στοιχειώδεις νόμους πάνω στους οποίους ο κόσμος μπορεί να χτιστεί πάλι μέσα από μια διαδικασία σύνθεσης"

Το νέο μήνυμα

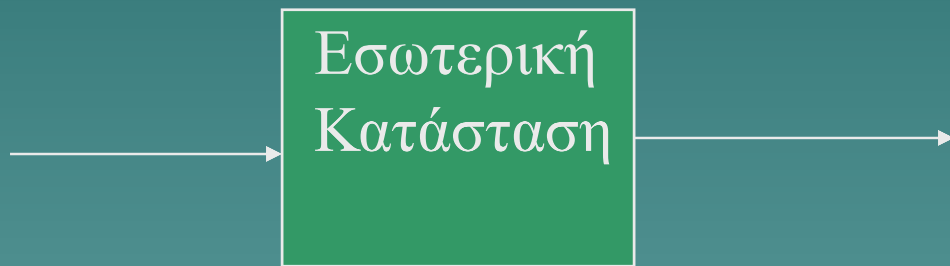
- Τι λεει ο Philip Anderson
- "Η ικανότητα να ελαττώσεις τα πάντα σε απλούς βασικούς νόμους δε σημαίνει και ικανότητα να χτίσης το σύμπαν αρχίζοντας από αυτούς"

Ένα παράδειγμα



Μέθοδοι μελέτης των Πολύπλοκων Συστημάτων

- Αυτόματο

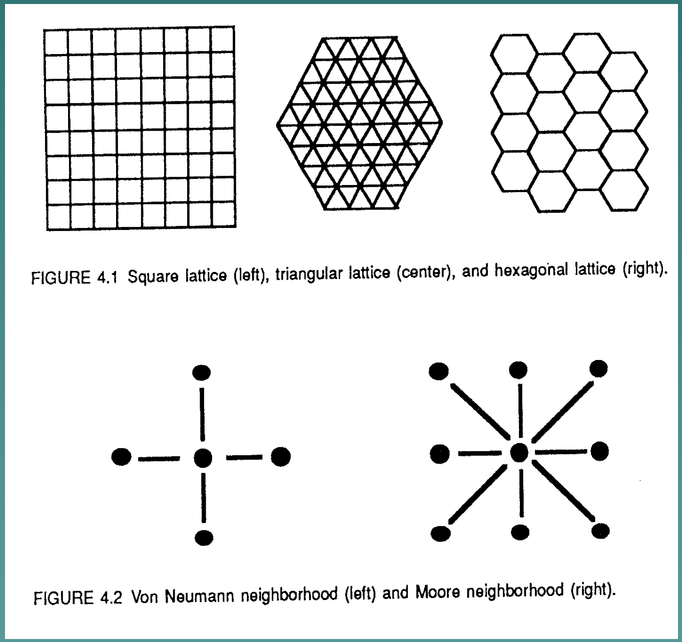


Μέθοδοι μελέτης των Πολύπλοκων Συστημάτων

- Δίκτυα αυτομάτων

Μέθοδοι μελέτης των Πολύπλοκων Συστημάτων: Κυψελιδικά αυτόματα

- Τα κυψελιδικά αυτόματα είναι αυτόματα κατανεμημένα στους κόμβους ενός περιοδικού πλέγματος. Μια γεωμετρική δομή, αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς μετατόπισης και περιστροφής



- Von Neumann

Κυψελιδικά αυτόματα (cellular automata)

- Στοιχεία του κυψελιδικού αυτόματου
- 1. Οι κανόνες του
- 2. Η σχέση των άκρων
- 3. Έκταση της αλληλεπίδρασης

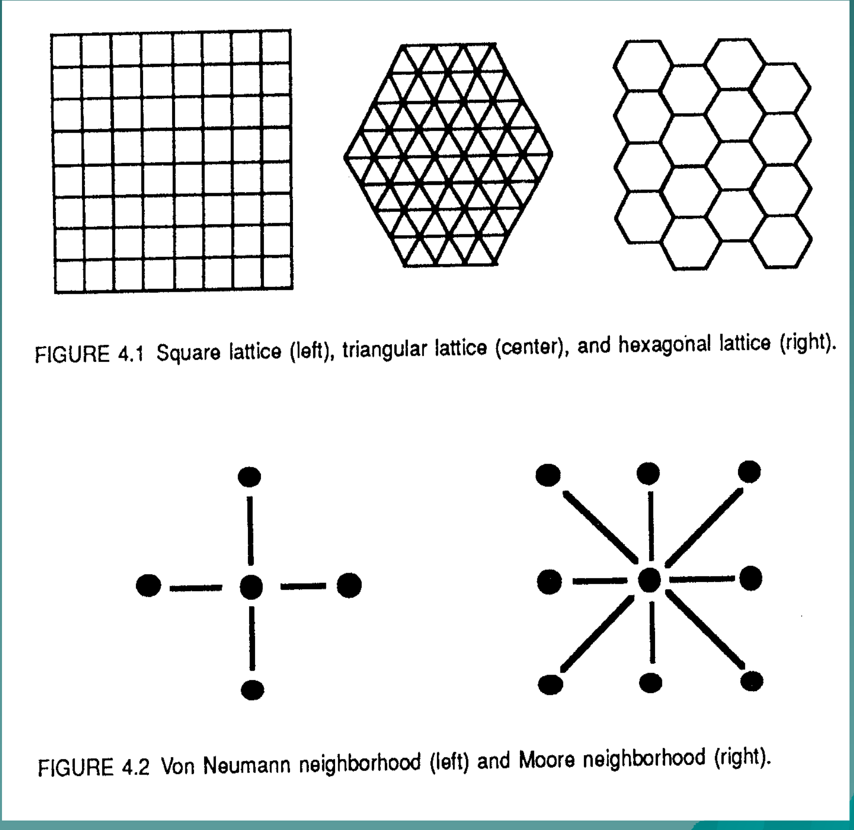


FIGURE 4.1 Square lattice (left), triangular lattice (center), and hexagonal lattice (right).

FIGURE 4.2 Von Neumann neighborhood (left) and Moore neighborhood (right).

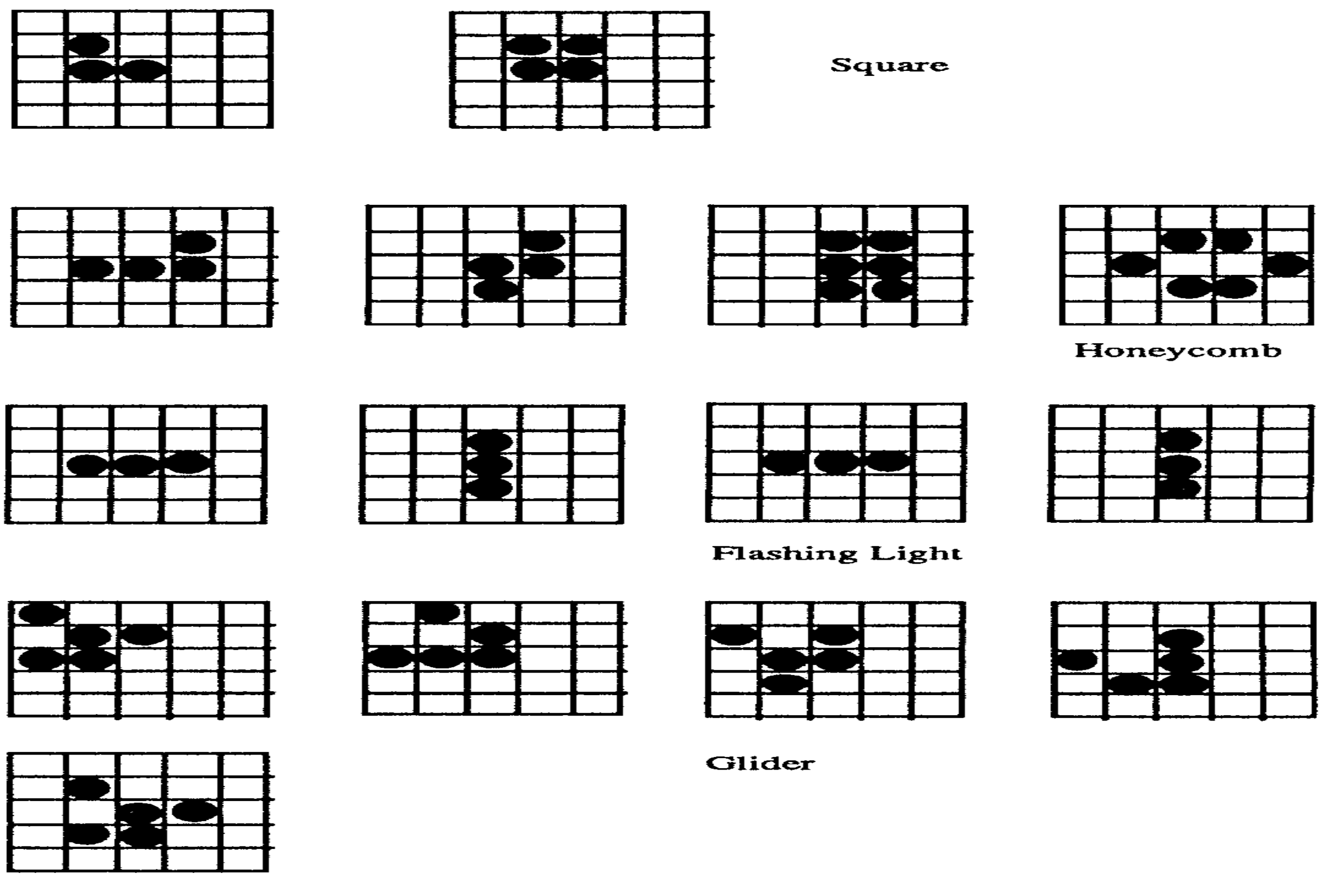
Conway's "Game of Life"

Κανόνες

(1) Ένα αυτόματο αν βρίσκεται σε κατάσταση 0 μετατρέπεται σε κατάσταση 1 αν τρεις γείτονες του είναι σε κατάσταση 1. Διαφορετικά παραμένει σε κατάσταση 0

(2) Ένα αυτόματο όταν βρίσκεται στην κατάσταση 1 παραμένει σ' αυτήν μόνο αν 2 ή 3 γείτονες είναι σε κατάσταση 1

Conway's "Game of Life"



GURE 4.6 Conway's "game of life". Time increases from left to right. The evolution four configurations: the first two configurations evolve toward fixed points, the third ward an attractor of period two, and the fourth is a glider, which reproduces itself after ur iterations translated by one square (down and to the right).

Μαθηματικά μοντέλα της φύσης

- Η εξίσωση διάχυσης στη Στατιστική μηχανική (Boltzmann-Maxwell)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + (\vec{F} / m) \cdot \nabla_u f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$$

- παρακολουθούμε την εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής $f(\vec{r},\vec{v},t)$
- Οι εξισώσεις της Ρευστομηχανικής (Navier-Stokes)

Οι εξισώσεις Navier-Stokes για τα ασυμπίεστα ρευστά

$$\vec{u} = \int \vec{v} d^3 r / n_0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Αν αγνοήσουμε την πίεση:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}) = \nu \nabla^2 \mathbf{\Omega}$$

όπου $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών:

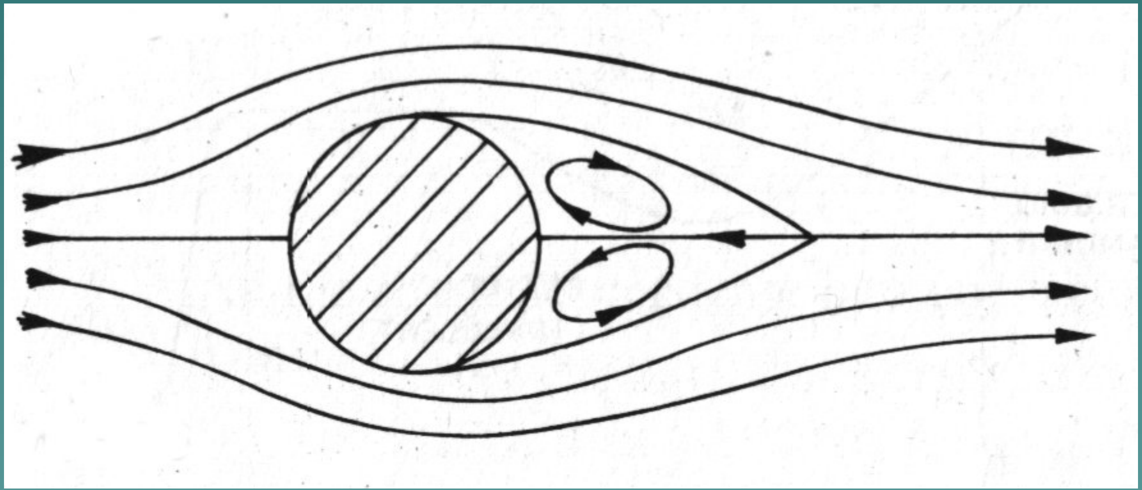
$$u' = \frac{u}{V} \qquad x' = \frac{x}{L}$$

και άρα :

$$t' = \frac{t}{L/V}$$

όπου L και V χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους της ροής

Χαρακτηριστικές Ποσότητες



Η εξίσωση Navier-Stokes γράφεται:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}) = \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{\Omega}$$

$$\text{όπου} \quad R = \frac{VL}{\nu}$$

- Η αδιάστατη παράμετρος R ονομάζεται αριθμός *Reynolds*.
- *Αρχή της Ομοιότητας*: Δυο ροές με ίσα R είναι όμοιες (για τις ίδιες οριακές συνθήκες)

Lattice Gas (FHP)

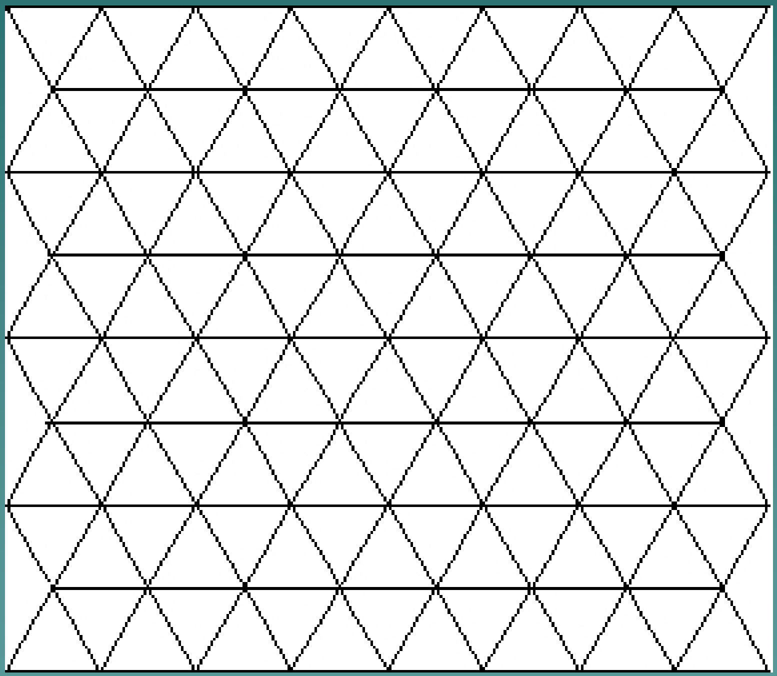
(V. Siminos and L. Vlahos)-(2001-2003)

- Ρευστό αποτελούμενο από σωματίδια που κινούνται σε ένα πλέγμα
- Σε κάθε κόμβο του πλέγματος βρίσκεται ένας πεπερασμένος αριθμός σωματιδίων
- Διακριτός
  - χώρος
  - χρόνος
  - ορμή
- Υπό ορισμένες συνθήκες τα σωματίδια που βρίσκονται ταυτόχρονα σε έναν κόμβο μπορεί να συγκρουστούν και να αλλάξει η κατεύθυνση κίνησης τους

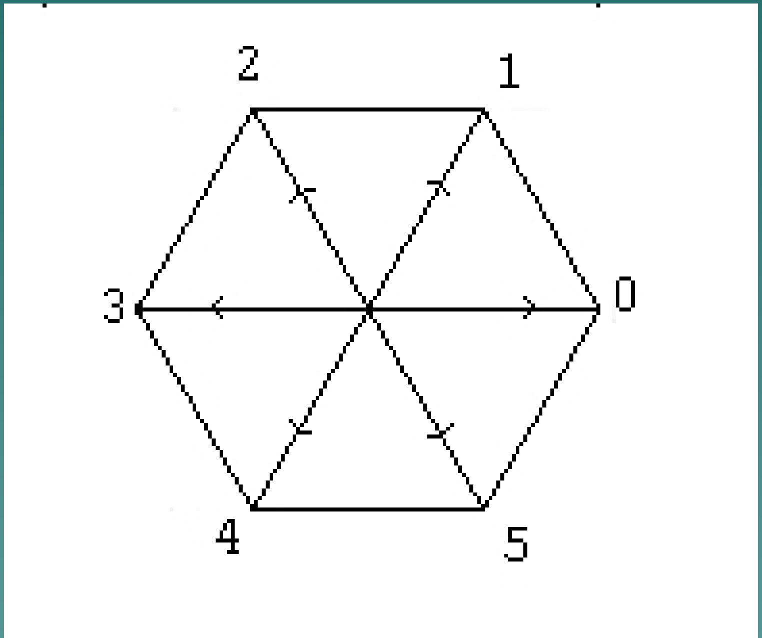
Το μοντέλο FHP

- Τριγωνικό πλέγμα
- Έξι διευθύνσεις ταχύτητας
- Μοναδιαία μάζα, ταχύτητα, βήμα χρόνου
- Απαγορευτική Αρχή: Μόνο ένα σωματίδιο με ταχύτητα σε δεδομένη διεύθυνση επιτρέπεται να βρεθεί σε κάθε κόμβο του πλέγματος
- Κρούσεις κατά τις οποίες διατηρείται η μάζα και η ορμή

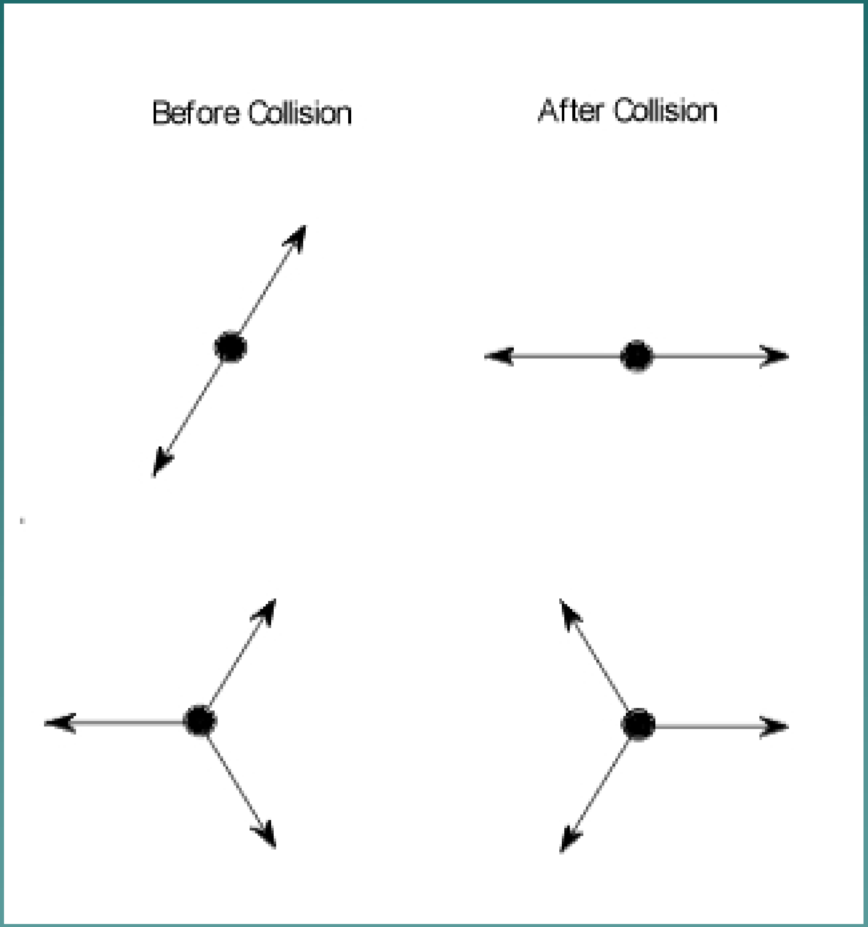
The lattice



Directions



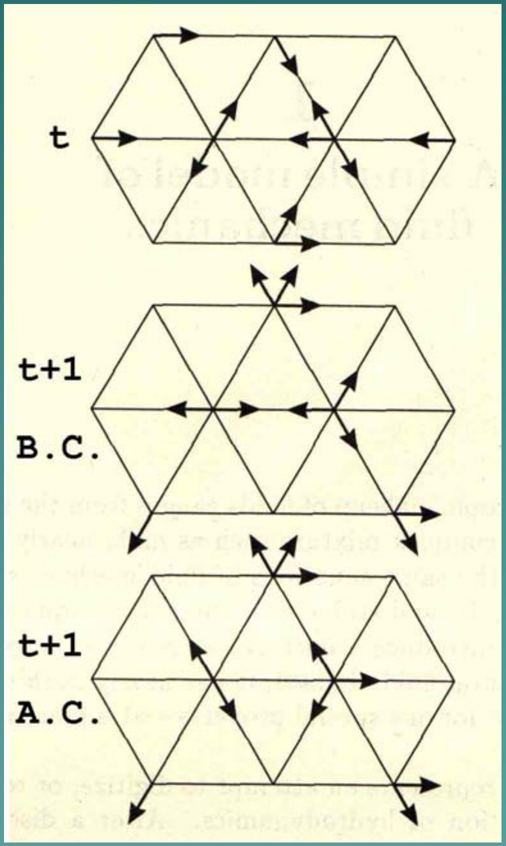
Collision Examples



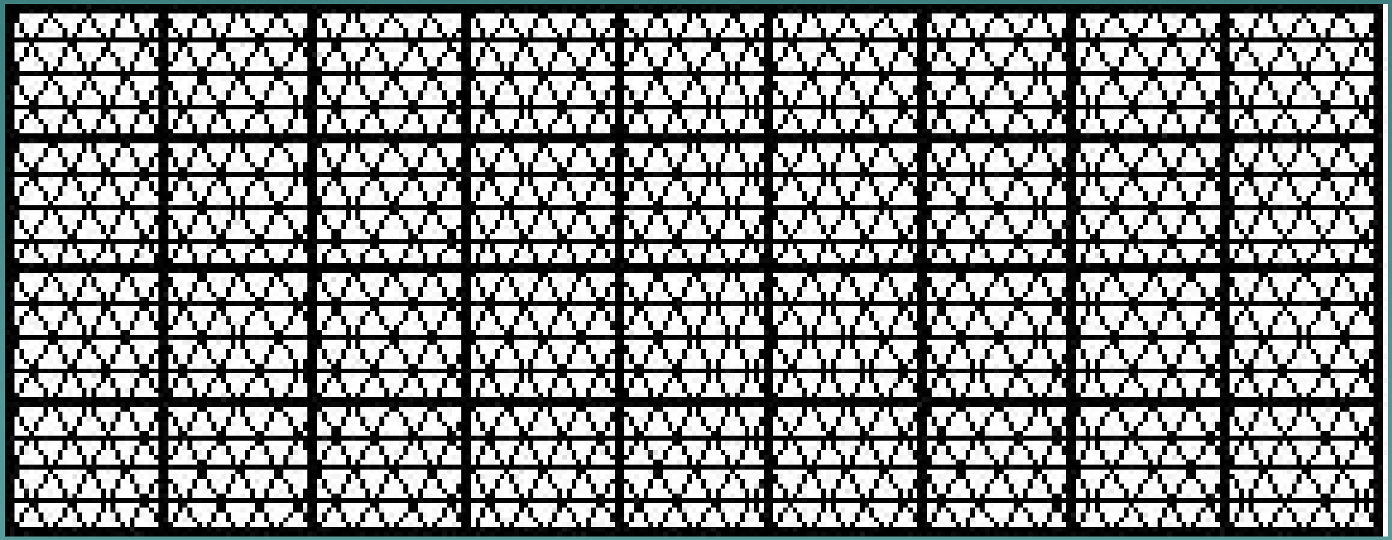
Χρονική εξέλιξη

- Σε κάθε βήμα χρόνου
  - Μετακίνηση
  - Σύγκρουση

Evolution sample



Μακροπλέγμα επί του μικροπλέγματος



Μικροδυναμική

- Μικροδυναμική του μοντέλου:
  - Boolean Μεταβλητές n_i
  - Εξισώσεις που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη κάθε κόμβου του πλέγματος

$$n_i(\mathbf{x}+\mathbf{c}_i, t+1) = n_i(\mathbf{x}, t) + \Delta_i(\mathbf{n}(\mathbf{x}, t))$$

Διατήρηση μάζας:

$$\sum_i \Delta_i(\mathbf{n}) = 0$$

Διατήρηση ορμής:

$$\sum_i \mathbf{c}_i \Delta_i(\mathbf{n}) = 0$$

Μακροδυναμική:

- Πυκνότητα μάζας:

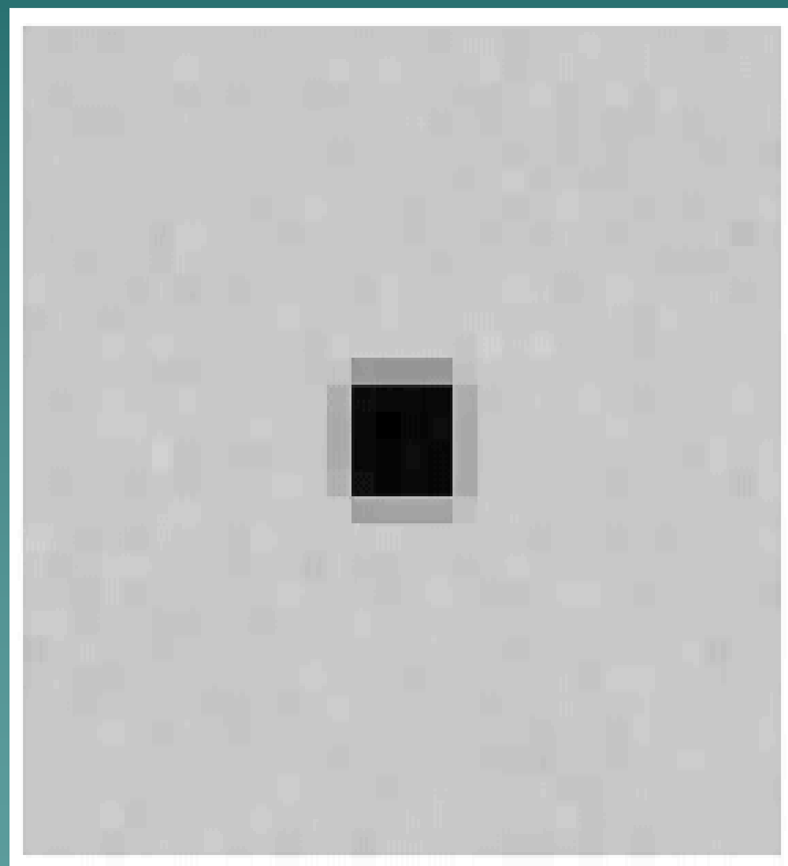
$$\rho = \sum_i \langle n_i \rangle$$

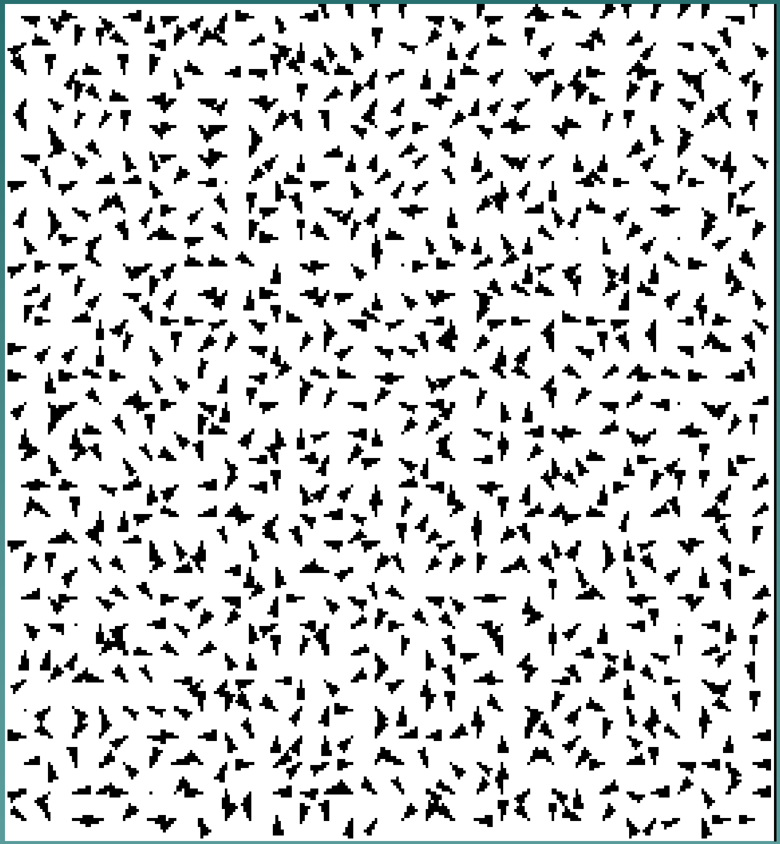
- Πυκνότητα ορμής

$$\rho u_\alpha = \sum_i \langle n_i \rangle c_{i\alpha}$$

Παραδείγματα

- Η ροή περνάει από εμπόδιο





Why Lattice Gas?

- Αντιμετωπίζεται με τη βοήθεια της στατιστικής μηχανικής.
- Η πίεση και ο συντελεστής ιξώδους μπορούν να βρεθούν ως συναρτήσεις της πυκνότητας και να συσχετιστούν με τη μικροδυναμική του μοντέλου.
- Παρουσιάζει ενδογενείς στατιστικές διακυμάνσεις της ίδιας φύσης με τις διακυμάνσεις στα πραγματικά ρευστά
- Υπολογιστικά πλεονεκτήματα

Η τιμή του γ καθορίζει το είδος της διάχυσης:

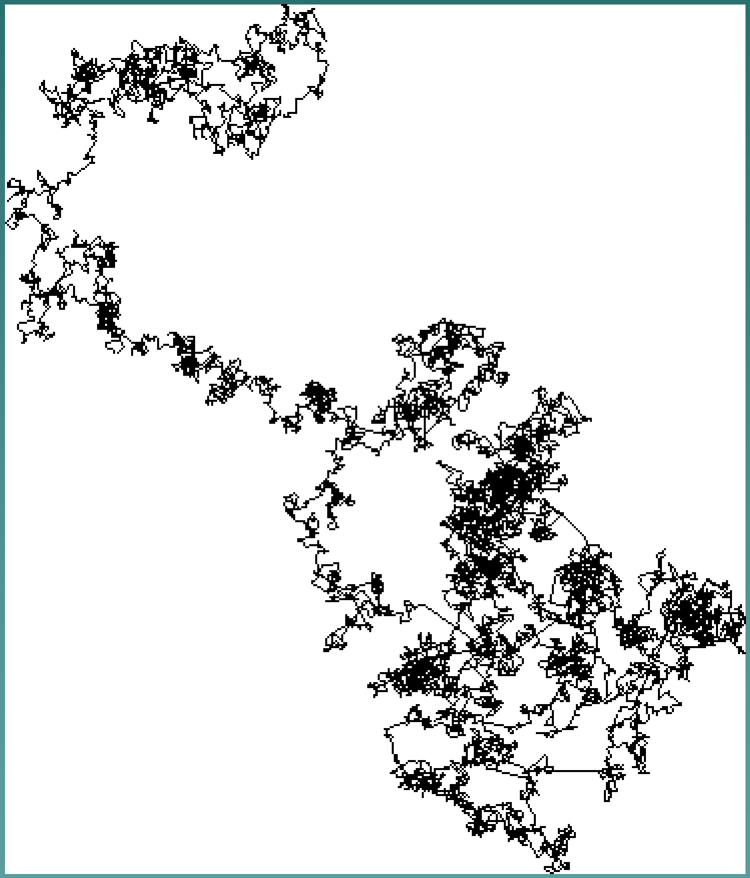
- $\gamma=1$: Κανονική διάχυση
- $0<\gamma<1$: Subdiffusion
- $1<\gamma<2$: Superdiffusion

Μελέτη Ιχνηθετών

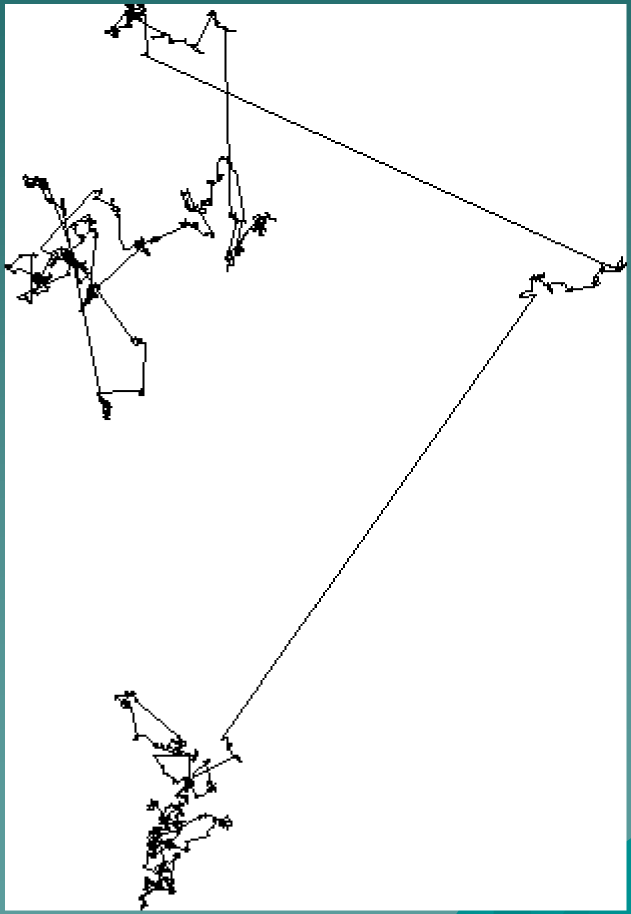
- Σωματίδια που ακολουθούν τη ροή
- Κινούνται με την μέση ταχύτητα του πεδίου
- Παρακολουθούμε τη διάχυση τους
- Εξίσωση διάχυσης:

$$\sigma^2 = \left\langle r^2(t) \right\rangle - \left\langle r(t) \right\rangle^2 = 2Dt^\gamma$$

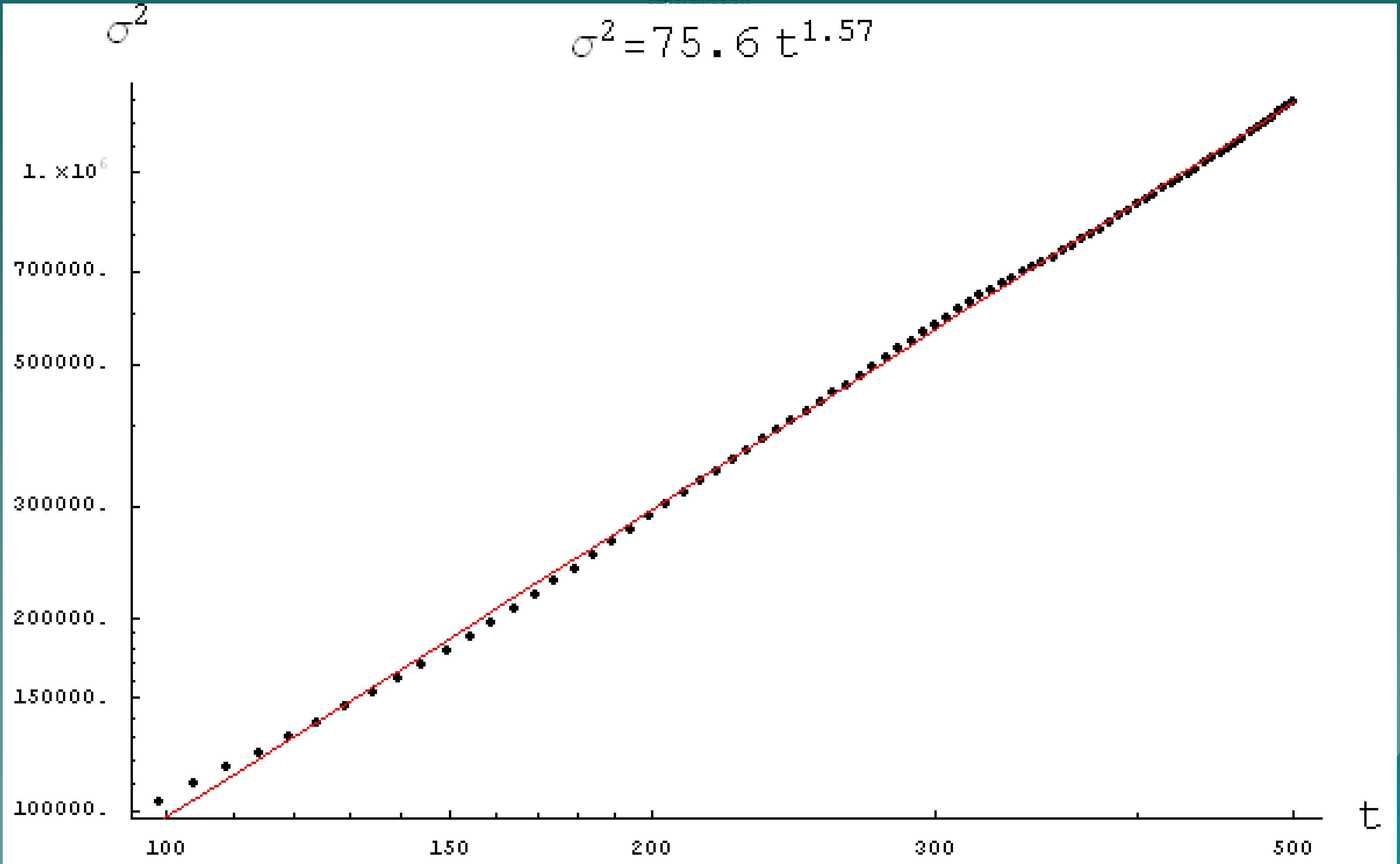
Random Walk



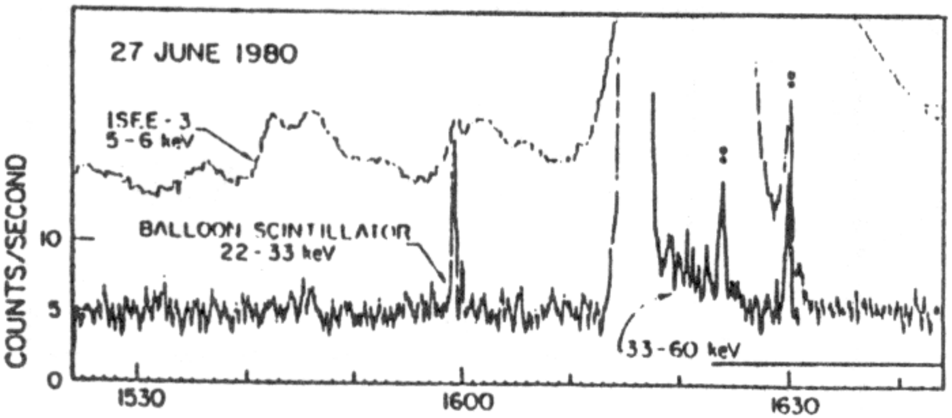
Lévy Flight

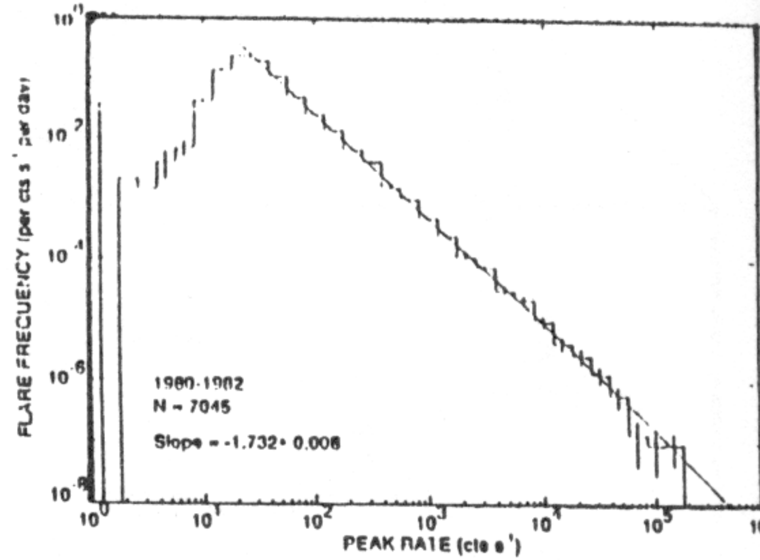


superdiffusion

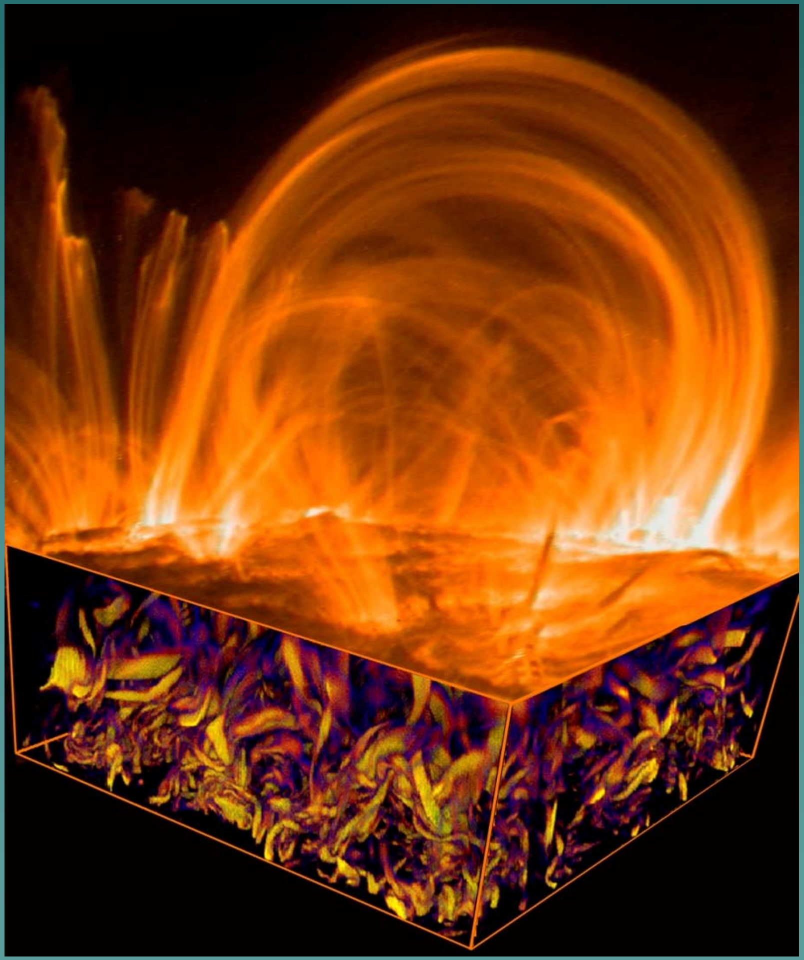


Χρονοσειρά των ηλιακών εκλάμψεων ή των σεισμών και ο χαρακτηριστικός νόμος δύναμης





Κέντρα δράσεις στους αστέρες



Αυτο-οργανούμενη κρισιμότητα (Self-organized Criticality) Μ. Γεωργούλης-(1995-1999)

- Ένα δυσδιάστατο πλέγμα $A^{n}(i,j)=0$ Τη χρονική στιγμή n
- Κανόνες
  - Προσθέτουμε σε τυχαία επιλεγμένα σημεία μία μονάδα

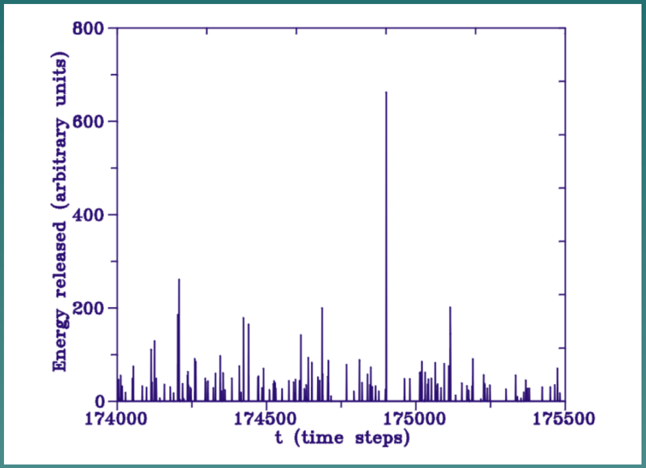
$$A^{n+1}(i,j)=A^{n}(i,j)+1$$

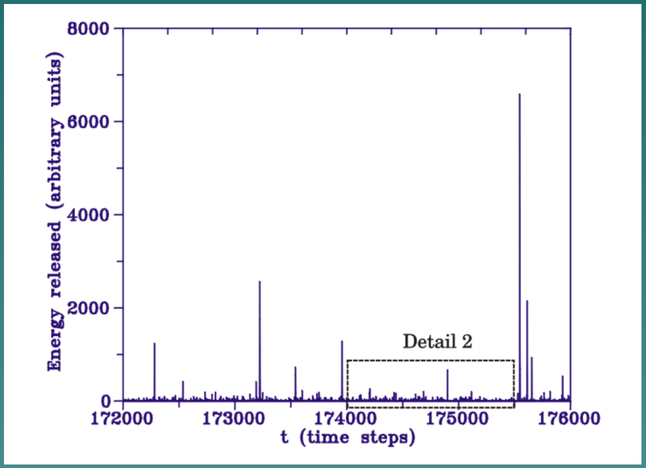
  - Αν σε κάποια σημεία παρουσιαστεί αστάθεια

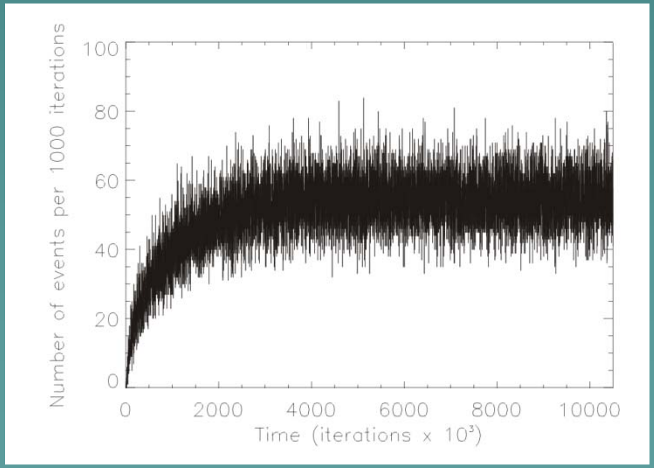
$$\left|[\frac{1}{4}(A(i+1,j)^{n}+A^{n}(i-1,j)+A^{n}(i,j+1)+A^{n}(i,j-1))-A^{n}(i,j)]\right|>A_{c}$$

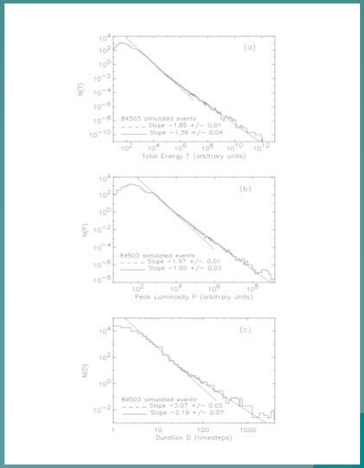
  - Η διαφορά ανακατανέμεται στους γείτονες και ένα μικρό ποσοστό χάνεται σε άλλες μορφές ενέργειας

Χρονοσειρά του μοντέλου









Percolation

- Ένα μοντέλο για τις πυρκαγιές και τις επιδημίες
- Στηρίζεται στην πιθανολογική μετάδοση πληροφορίας στο πλέγμα και τη δημιουργία συσσωματωμάτων όλων των διαστάσεων

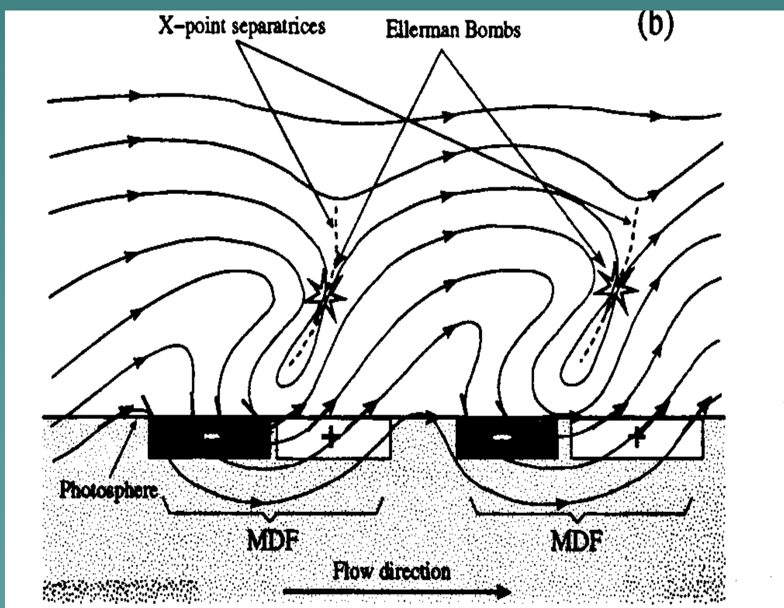
Οι βασικοί κανόνες του Μοντέλου (Βλάχος, Φράγκος, Isliker, Γεωργούλης)-(2001-2002)

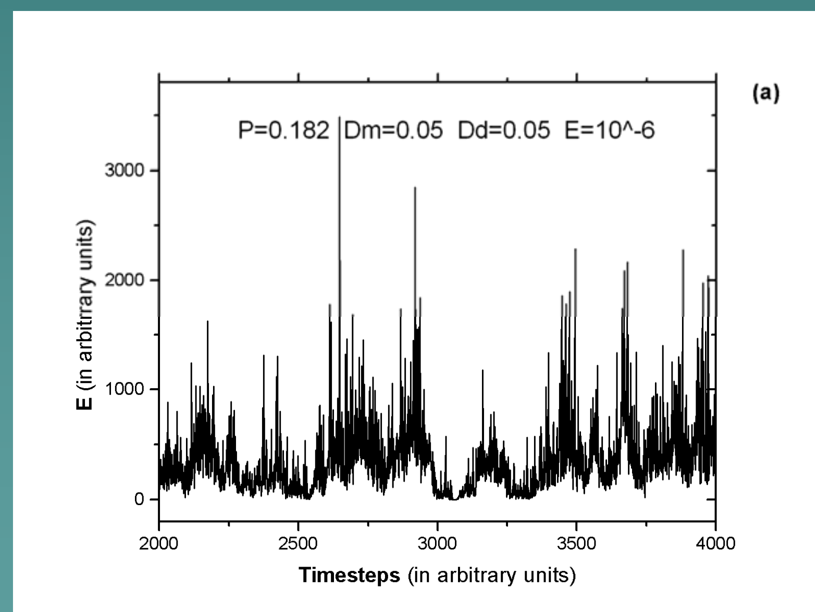
- We use a 200x1000 square grid with no magnetic flux (0)
- We start by filling 0.5 % (+1)positive magnetic flux a 0.5% (-1) negative.
- Stimulation probability P: Any active point for one time step stimulate the emergence of new flux in the neighborhood. Newly emerged flux appear in dipoles.
- Diffusion due to unrestricted random walk D_m:(mobility) free motion on the grid.
- Diffusion due to submergence D_d: (submergence of flux) Fast disappearance if the neighboring points are non-active.
- Spontaneous generation of new flux E: (its value is not important) To keep the process going

Απελευθέρωση ενέργειας

- Μαγνητικές ασυνέχειες απελευθερώνουν ενέργεια

$$E \sim B^2$$

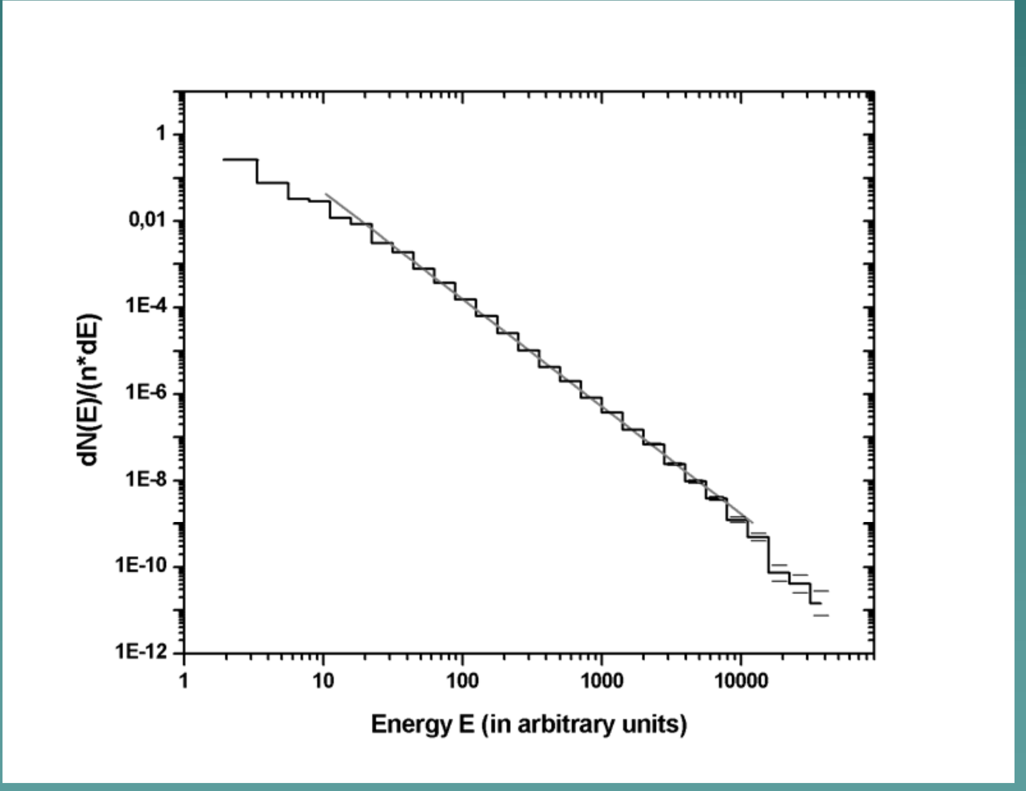




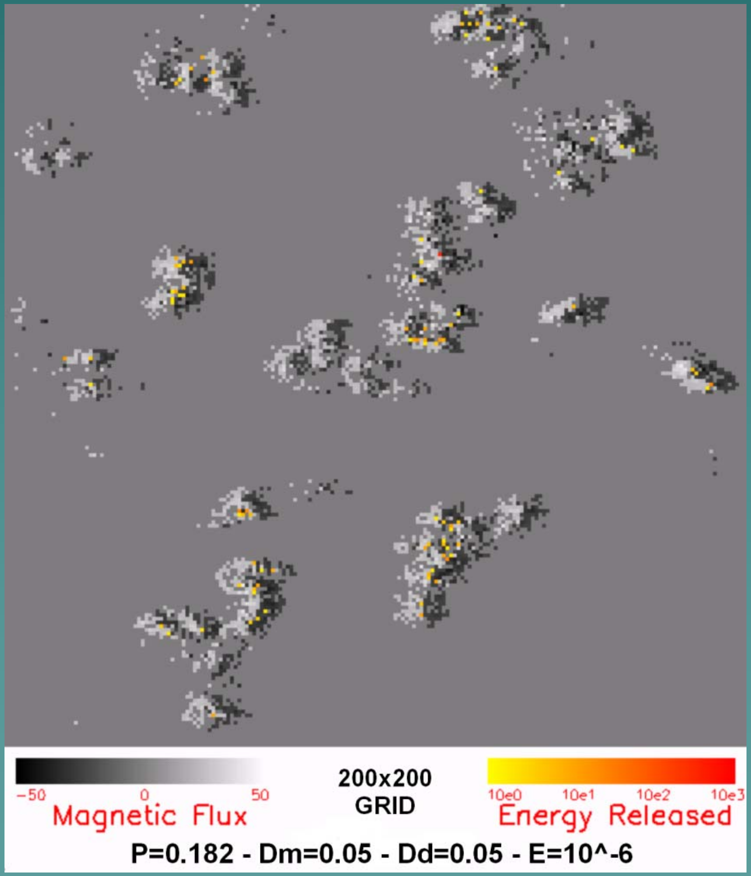
Peak flux frequency distribution

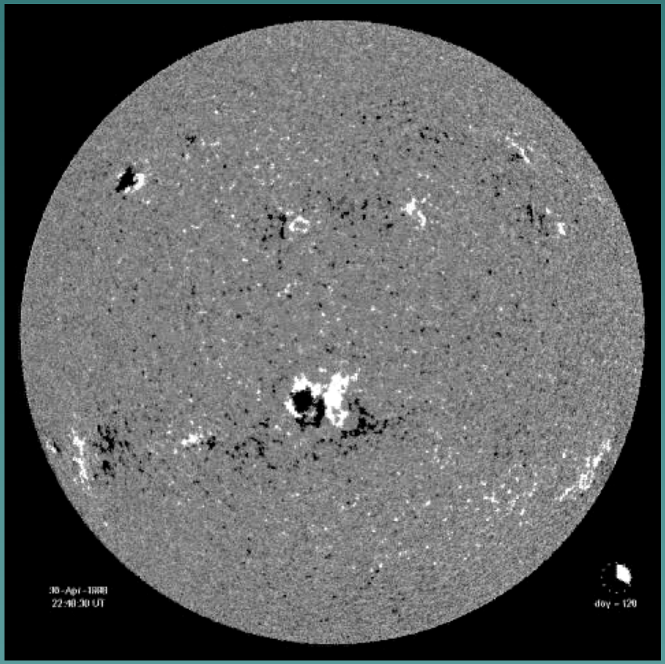
- a=2.24

$$N(E) \sim E^{-a}$$

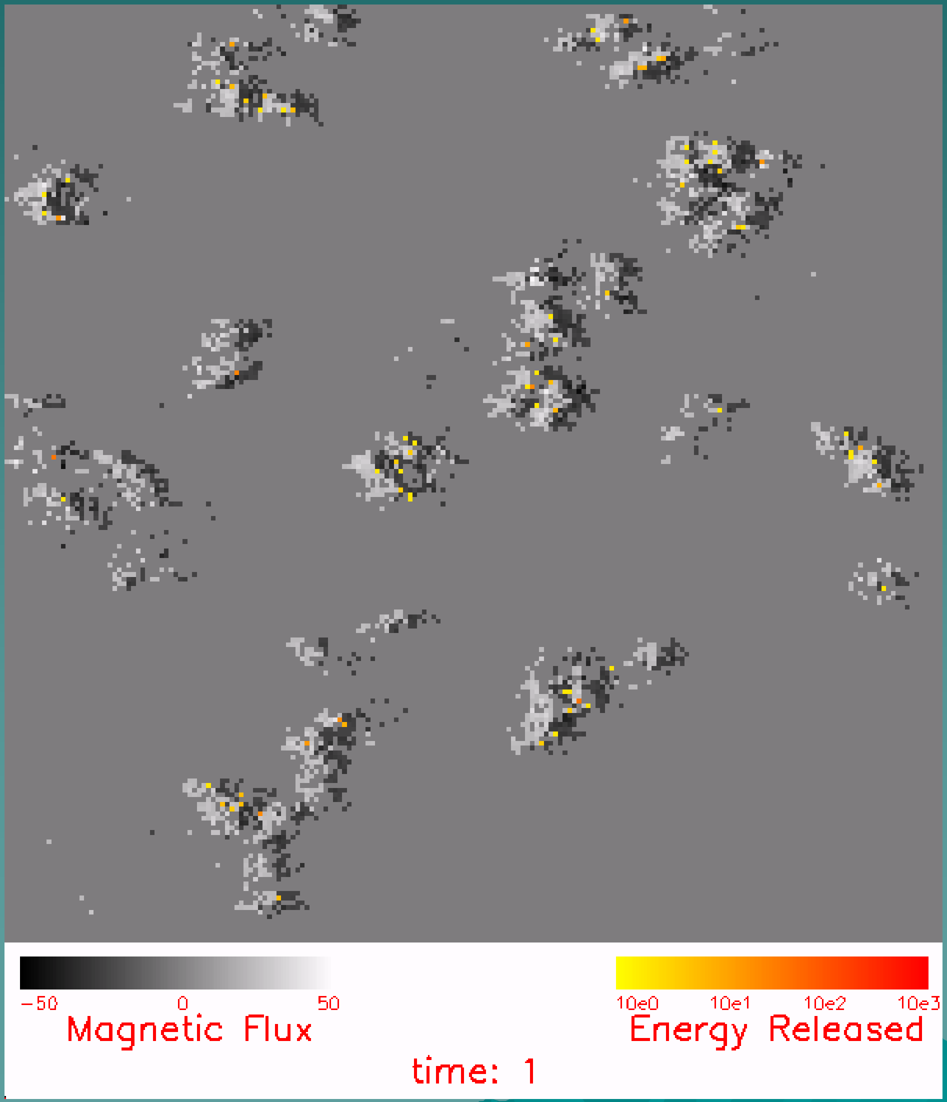


A basic portrait

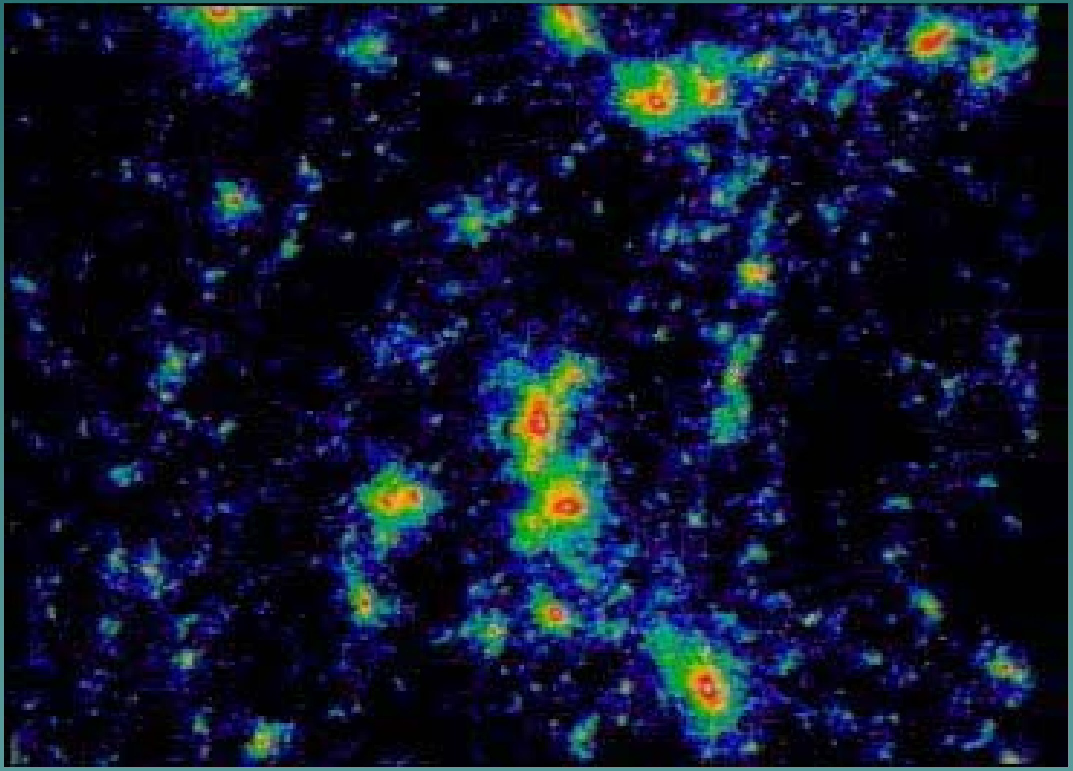




A movie on the active region evolution and magnetic field cancellation



Θα μπορούσαμε να φτιάξουμε ένα κυψελιδικό αυτόματα για τη δημιουργία γαλαξιών στο σύμπαν?



- Περισσότερα στην ιστοσελίδα της ερευνητικής μας ομάδας
- http://www.astro.auth.gr/~vlahos

Συμπεράσματα

- Η μελέτη της συμπεριφοράς πολύπλοκων φυσικών συστημάτων είναι δυνατή με τη βοήθεια των κυψελιδικών αυτομάτων
- Το πέρασμα από τις παρατηρήσεις και την ποιοτική περιγραφή ενός πολύπλοκου φυσικού προβλήματος στη μελέτη συγκεκριμένου κυψελιδικού αυτόματου είναι δυνατή.

Συμπεράσματα

- Τι χρειαζόμαστε να ξέρουμε για να μεταφέρουμε ένα φυσικό πρόβλημα σε CA

1. Τη μεταφορά των φυσικών διεργασιών σε κανόνες του αυτόματου
2. Την επιλογή του σωστού πλέγματος
3. Τη σωστή επιλογή της αλληλεπίδρασης των γειτονικών αυτομάτων

Κλείνοντας θα ήθελα να επισημάνω την τεράστια εκπαιδευτική σημασία των CA

Βιβλιογραφία

1. "*Cellular Automata Machines*", T. Tofoli and N. Magoli, The MIT Press, 1985
2. "*Cellular automata and Complexity*", S. Wolfram, Addison-Wisley, 1994
3. "*How Nature works*", P. Bak, Springer Verlag, 1996
4. "*Self-Organized Criticality*", H. J. Jensen, Cambridge University Press, 1998
5. "*Introduction to Percolation theory*" D. Stauffer and A. Aharony, Taylor and Francis, 1992
6. "*Fractals, Chaos and Power Laws*", M. Schroeder, W.H. Freeman and Co., 1991.

Ο Αρκάς για τους μεγάλους φυσικούς